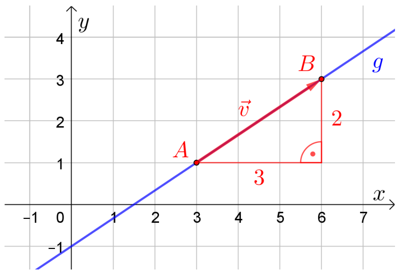
Gerade eindeutig beschreiben

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die dargestellte Gerade g *eindeutig* zu beschreiben:



i) Zwei Punkte: Die Gerade verläuft durch die beiden Punkte $A = (3 \mid 1)$ und $B = (6 \mid 3)$.

ii) Punkt und Steigung: Die Gerade verläuft durch den Punkt $A = (3 \mid 1)$ und hat die Steigung $k = \frac{2}{3}$.

iii) Punkt und Richtung: Die Gerade verläuft durch den Punkt $A = (3 \mid 1)$ und hat $\vec{v} = \binom{3}{2}$ als **Richtungsvektor**.

Stelle diese drei Möglichkeiten im Bild oben dar.

Punkt und Richtung

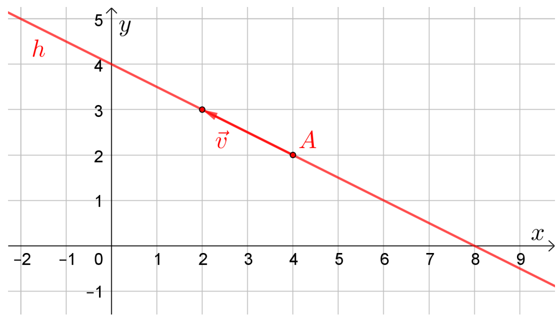
Die Gerade h verläuft durch den Punkt $A = (4 \mid 2)$, und $\vec{v} = \binom{-2}{1}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade.

1) Zeichne diese Gerade rechts ein.

Jede Gerade hat unendlich viele Richtungsvektoren.

2) Ermittle jeweils die fehlende Komponente so, dass der Vektor ein Richtungsvektor der Gerade h ist.

$$\vec{a} = \binom{4}{-2} \qquad \vec{b} = \binom{-1}{0{,}5} \qquad \vec{c} = \binom{3}{-1{,}5}$$

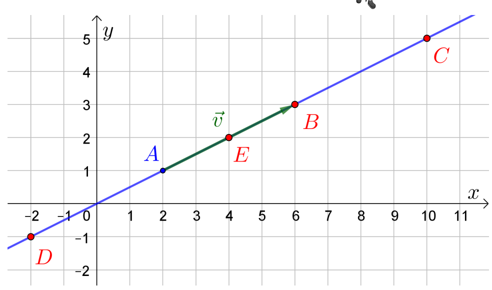


Punkte entlang einer Geraden berechnen

Die dargestellte Gerade verläuft durch den Punkt $A = (2 \mid 1)$, und $\vec{v} = \binom{4}{2}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade.
Berechne die folgenden Punkte, und zeichne sie rechts ein.

$B = A + \vec{v} = (6 \mid 3)$ $\qquad D = A + (-1) \cdot \vec{v} = (-2 \mid -1)$

$C = A + 2 \cdot \vec{v} = (10 \mid 5)$ $\qquad E = A + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = (4 \mid 2)$



Parameterdarstellung von Geraden

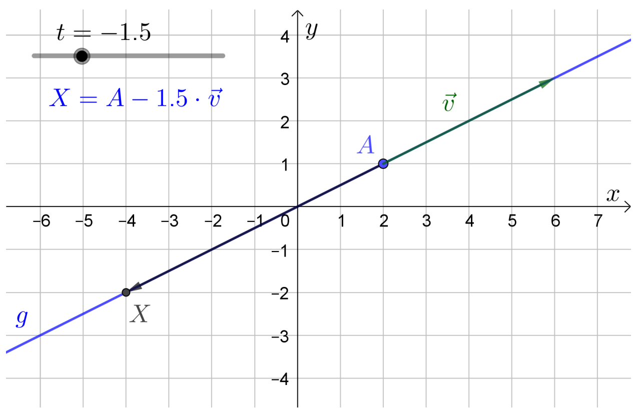
Die Gerade g verläuft durch den Punkt A, und $\vec{v}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade.
Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt X mit

$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

auf der Gerade.
Die Zahl $\boldsymbol{t}$ nennen wir **Parameter** und

$$\boldsymbol{g\colon X = A + t \cdot \vec{v}}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade g.



Jeder Punkt X auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$.
Zum Beispiel legt die Parameterdarstellung $X = \binom{2}{1} + t \cdot \binom{4}{2}$ die dargestellte Gerade g eindeutig fest.
Für den Parameterwert $t = -1{,}5$ erhalten wir den Punkt $X = (-4 \mid -2)$ auf dieser Gerade.

Gerade durch zwei Punkte

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte $A = (-2 \mid 3)$ und $B = (1 \mid 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt auf Gerade?

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Gerade $h\colon X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $P = (9 \mid -1)$ auf dieser Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad 9 &= -3 + t \cdot 4 &\iff\quad t &= 3 \\ \text{II:}\quad -1 &= 2 + t \cdot (-1) &\iff\quad t &= 3 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt also auf der Gerade h.
Der Parameterwert $t = 3$ liefert diesen Punkt P.

Liegt der Punkt $Q = (2 \mid 1)$ auf dieser Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

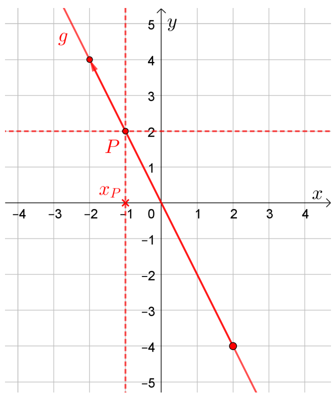
Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad 2 &= -3 + t \cdot 4 &\iff\quad t &= \tfrac{5}{4} = 1{,}25 \\ \text{II:}\quad 1 &= 2 + t \cdot (-1) &\iff\quad t &= 1 \end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt also *nicht* auf der Gerade h.
Es gibt keine Zahl $t \in \mathbb{R}$, die *beide* Gleichungen erfüllt.

Punkt auf Gerade

Der Punkt $P = (x_P \mid 2)$ liegt auf der Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.
Ermittle x_P grafisch und rechnerisch.



$$\text{I: } x_P = 2 + t \cdot (-4)$$

$$\text{II:}\quad 2 = -4 + t \cdot 8 \implies t = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

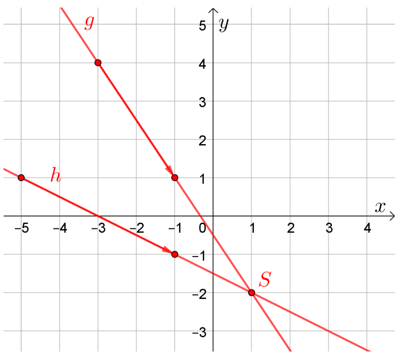
$$\overset{\text{I}}{\implies} x_P = -1$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Die beiden Geraden

$$g\colon X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

schneiden einander im Punkt S. Ermittle S grafisch und rechnerisch.



$$S = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I:}\quad -3 + t \cdot 2 = -5 + u \cdot 4 \implies t = -1 + 2 \cdot u \\ &\text{II: } 4 + t \cdot (-3) = 1 + u \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\overset{\text{II}}{\implies} 4 + (-1 + 2 \cdot u) \cdot (-3) = 1 - 2 \cdot u$$

$$\implies 7 - 6 \cdot u = 1 - 2 \cdot u \implies u = \frac{3}{2}$$

$$\implies S = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (1 \mid -2)$$

Lagebeziehung zweier Geraden in der Ebene

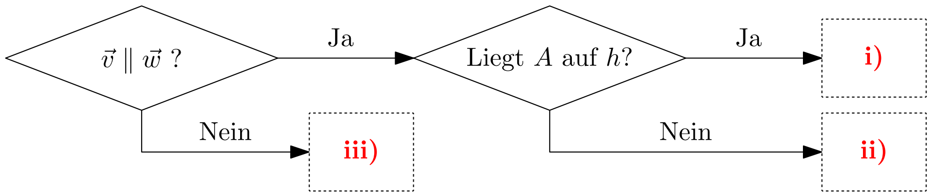
Zwei Geraden in der Ebene haben genau eine der drei folgenden Lagebeziehungen:

i) ident **ii)** parallel (aber nicht ident) **iii)** schneidend (aber nicht ident)

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden g und h aus den Parameterdarstellungen

$$g\colon X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad h\colon X = B + u \cdot \vec{w}$$

ermitteln kannst. Trage dazu die 3 Lagebeziehungen **i)**, **ii)** bzw. **iii)** richtig in die Kästchen ein:



Lagebeziehung zweier Geraden in der Ebene

Ermittle alle Werte a und b so, dass die Geraden g und h …

i) …ident sind. **ii)** …parallel (aber nicht ident) sind. **iii)** …schneidend (aber nicht ident) sind.

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h\colon X = \begin{pmatrix} a \\ 7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} b \\ -6 \end{pmatrix}$$

Unten ermitteln wir die folgenden Ergebnisse:

i) $b = 4$ und $a = -2$ **ii)** $b = 4$ und $a \neq -2$ **iii)** $b \neq 4$

Unter welcher Bedingung sind die Richtungsvektoren parallel?

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ -6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b \\ -6 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff r = -2$ und $b = 4$

Genau dann, wenn $b = 4$ gilt, sind die Richtungsvektoren parallel.

Unter welcher Bedingung liegt der Punkt $(0 \mid 4)$ nicht nur auf g, sondern auch auf h?

$(0 \mid 4)$ liegt auf $h \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\colon\ & 0 = a + u \cdot 4 \\ \mathrm{II}\colon\ & 4 = 7 + u \cdot (-6) \implies u = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\implies} 0 = a + \tfrac{1}{2} \cdot 4 \implies a = -2$$

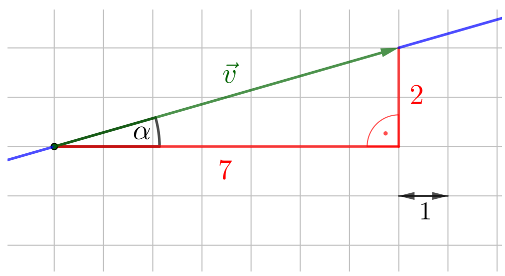
Genau dann, wenn $a = -2$ gilt, liegt der Punkt $(0 \mid 4)$ auch auf h.

Steigung in Prozent / Steigungswinkel

Eine Gerade hat $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.
Berechne die Steigung der Gerade in Prozent und den Steigungswinkel.

$$k = \frac{2}{7} = 0{,}2857... = 28{,}57...\%$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{7} \implies \alpha = \arctan\left(\frac{2}{7}\right) = 15{,}94...^\circ$$



Funktionsform → Parameterdarstellung

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade $y = 4 \cdot x - 7$.

Der Punkt $(x \mid y) = (0 \mid -7)$ liegt auf der Gerade.
Aus der Steigung $k = 4$ folgt, dass der Vektor $\vec{v} = \binom{1}{4}$ ein Richtungsvektor der Gerade ist.

$$\implies X = \binom{0}{-7} + t \cdot \binom{1}{4}$$

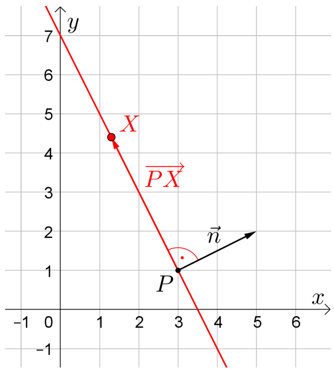
Normalvektorform einer Gerade

Rechts unten ist, ausgehend vom Punkt $P = (3 \mid 1)$, der Vektor $\vec{n} = \binom{2}{1}$ eingezeichnet.
$X = (x \mid y)$ ist ein beliebiger Punkt in der Zahlenebene.
Für den Vektor $\overrightarrow{PX}$ gilt also: $\overrightarrow{PX} = \binom{x-3}{y-1}$
Die Gleichung

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \qquad \textbf{Normalvektorform}$$

ist genau dann erfüllt, wenn der Vektor $\vec{n}$ normal auf $\overrightarrow{PX}$ steht.
Wir formen diese Gleichung um:

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{x-3}{y-1} = 0$$
$$2 \cdot (x-3) + 1 \cdot (y-1) = 0$$
$$2 \cdot x + 1 \cdot y = 7 \qquad \textbf{Allgemeine Form}$$
$$y = -2 \cdot x + 7 \qquad \textbf{Funktionsform}$$



Alle Punkte X, die diese Gleichung erfüllen, bilden also eine Gerade. Zeichne sie oben ein.
Allgemein ist $\vec{n} = \binom{a}{b}$ ein Normalvektor der Gerade $\boldsymbol{a} \cdot x + \boldsymbol{b} \cdot y = c$.

Parameterdarstellung → Geradengleichungen

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Gerade $g\colon X = \binom{4}{-1} + t \cdot \binom{3}{2}$

1) Stelle die Gerade g in allgemeiner Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ dar.

2) Stelle die Gerade g in der Funktionsform $y = k \cdot x + d$ dar.

3) Berechne die Schnittpunkte der Gerade g mit den Koordinatenachsen.

1) Wir ermitteln einen Normalvektor der Gerade: $\vec{n} = \binom{2}{-3}$

$$\implies 2 \cdot x - 3 \cdot y = c$$

Wir setzen den Punkt $(4 \mid -1)$ ein:

$$\implies 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = c \implies c = 11 \implies 2 \cdot x - 3 \cdot y = 11$$

2) Wir formen in die Funktionsform um:

$$2 \cdot x - 3 \cdot y = 11 \iff 2 \cdot x - 11 = 3 \cdot y \iff y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{11}{3}$$

3) Wir setzen $x = 0$ bzw. $y = 0$ ein:

$$x = 0 \implies y = -\tfrac{11}{3} \implies S_y = \left(0 \mid -\tfrac{11}{3}\right) \qquad y = 0 \implies x = \tfrac{11}{2} \implies S_x = \left(\tfrac{11}{2} \mid 0\right)$$

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at