Produktregel

Die Funktion p ist das Produkt von zwei differenzierbaren Funktionen f und g:

$$\boldsymbol{p(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

Die Ableitungsfunktion von p können wir systematisch mit der **Produktregel** ermitteln:

$$\boldsymbol{p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion p' von $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$.

$p'(x) =$

Stammfunktion von p

Für die Funktion p gilt: $p(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)$

Eine Stammfunktion P der Funktion p soll ermittelt werden.

Lukas meint: „*x^3 ist eine Stammfunktion von $3 \cdot x^2$ und Sinus ist eine Stammfunktion von Cosinus. Also ist $x^3 \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p.*“

1) Begründe, warum die Behauptung von Lukas *falsch* ist.

2) Zeige, dass $P(x) = 6 \cdot x \cdot \cos(x) + (3 \cdot x^2 - 6) \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von p ist.

Partielle Integration

Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus dem Produkt p zweier Funktionen systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion P zu ermitteln.

Die **partielle Integration** ist eine Methode, die dabei helfen *kann*.

Aus der Produktregel folgt nämlich:

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Merkhilfe:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Integrieren Ableiten

Jede Stammfunktion von der linken Seite ist auch eine Stammfunktion von der rechten Seite und umgekehrt.

Wenn wir eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ suchen, dann können wir also stattdessen auch eine Stammfunktion von g' und eine Stammfunktion von $f' \cdot g$ ermitteln.

Partielle Integration

Die Funktion p mit $p(x) = x \cdot \cos(x)$ ist ein Produkt von zwei Funktionen.

Das Ermitteln einer Stammfunktion P dieser Funktion p ist *nicht* offensichtlich.

Wenn wir aber die eine Funktion ableiten und die andere Funktion integrieren,
dann können wir vom Ergebnis eine Stammfunktion ermitteln.

Wir stellen zwei Schreibweisen für diese Methode der **partiellen Integration** vor:

Schreibweise 1 (Unbestimmtes Integral)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt durch Integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Es gilt also:

$$\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Integrieren Ableiten

Schreibweise 2 (Stammfunktionen)

Aus $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$ folgt:

$$p(x) = x \cdot \cos(x) = [\,x \cdot \sin(x)\,]' - 1 \cdot \sin(x) = [\,x \cdot \sin(x) + \cos(x)\,]'$$

Integrieren Ableiten

Jede Stammfunktionen P von $p(x) = x \cdot \cos(x)$ hat also die folgende Form:

$$P(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

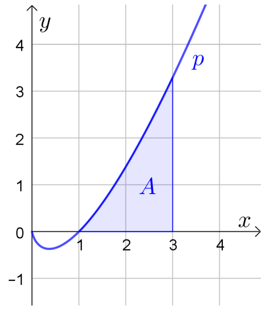
Kluge 1

Ermittle jene Stammfunktion P von $p(x) = \ln(x)$, die $P(1) = 5$ erfüllt.

Hinweis: $p(x) = \ln(x) \cdot 1$

Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Funktion p gilt: $p(x) = x \cdot \ln(x)$



Entscheide mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 3$, $A = 3$ oder $A > 3$ gilt.

Im Kreis gelaufen?

Ermittle eine Stammfunktion P von $p(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.

Pythagoras

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)\,.$

Hinweis: Pythagoras am Einheitskreis
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Schritt für Schritt

Ermittle alle Stammfunktionen P von $p(x) = x^2 \cdot e^x\,.$