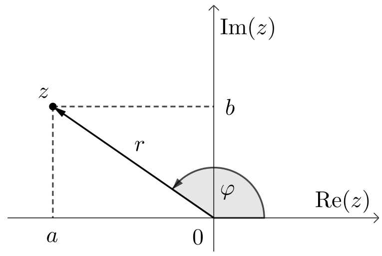
Komponentenform & Polarform

Wir können einen Punkt in der Zahlenebene bzw. eine komplexe Zahl auf 2 Arten *eindeutig* festlegen:

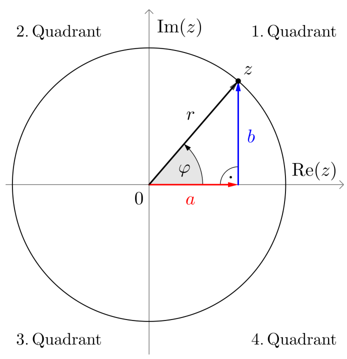
1) Wir geben die beiden Koordinaten des Punkts an.
Bei komplexen Zahlen sind das also der Realteil a und der Imaginärteil b der komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$.
Diese Darstellung $\boldsymbol{z = a + b \cdot i}$ heißt **Komponentenform**.



2) Wir geben den **Abstand** $\boldsymbol{r}$ vom Koordinatenursprung und den **Winkel** $\boldsymbol{\varphi}$ an, den der **Zeiger** zum Punkt und die positive horizontale Achse einschließen.
Diese Darstellung $\boldsymbol{z = (r;\varphi)}$ heißt **Polarform**.
Der Abstand $\boldsymbol{r}$ heißt **Betrag** der komplexen Zahl, und wir schreiben: $r = |z|$
Der Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ heißt **Argument** der komplexen Zahl.

Polarform ⇝ Komponentenform

Unten ist eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ im 1. Quadranten eingezeichnet.



1) Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Realteil a auf.

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \implies a = r \cdot \cos(\varphi)$$

2) Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Imaginärteil b auf.

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \implies b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Diese beiden Formeln gelten in allen 4 Quadranten, weil die Winkelfunktionen am Einheitskreis so definiert sind.

Polarform ⇝ Komponentenform

Wandle die komplexe Zahl $z = (5; 142°)$ in Komponentenform um.

$$a = 5 \cdot \cos(142°) = -3{,}94...$$

$$b = 5 \cdot \sin(142°) = 3{,}07...$$

$$\implies z = -3{,}94... + 3{,}07... \cdot i$$

Komponentenform ⇝ Polarform (Spezialfälle)

Zeichne rechts jeweils den Zeiger zu der komplexen Zahl ein, und wandle die komplexe Zahl in Polarform um.

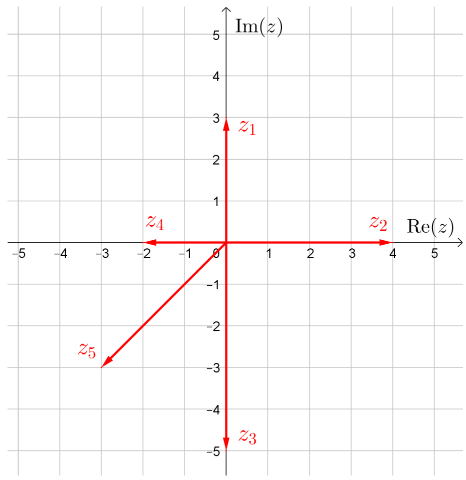
1) $z_1 = 3 \cdot i = (3; 90°)$

2) $z_2 = 4 = (4; 0°)$

3) $z_3 = -5 \cdot i = (5; 270°)$

4) $z_4 = -2 = (2; 180°)$

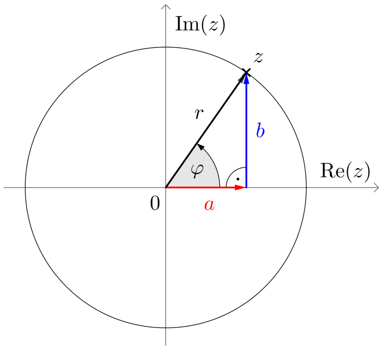
5) $z_5 = -3 - 3 \cdot i = (\underbrace{\sqrt{3^2 + 3^2}}_{=4{,}242...}; 225°)$



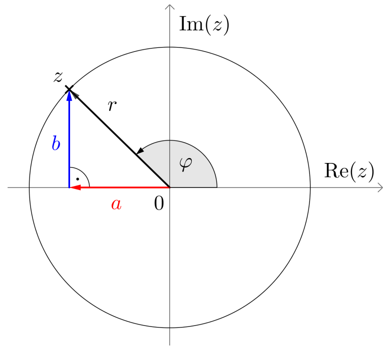
Komponentenform ⇝ Polarform

Der Realteil a und der Imaginärteil b einer komplexen Zahl sind bekannt. Setze jeweils $<$ oder $>$ ein:

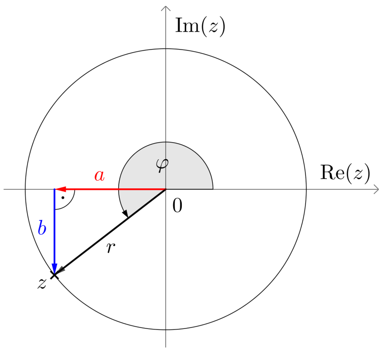
1. Quadrant: $a > 0$ und $b > 0$



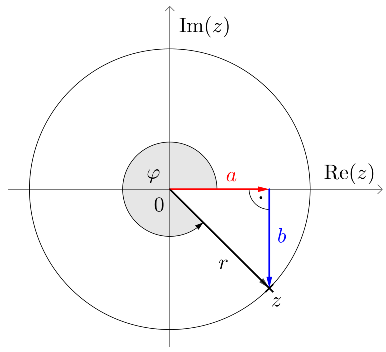
2. Quadrant: $a < 0$ und $b > 0$



3. Quadrant: $a < 0$ und $b < 0$



4. Quadrant: $a > 0$ und $b < 0$



Stelle mithilfe von a und b eine Formel für den Betrag r der komplexen Zahl auf:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Überlege dir in jedem Quadranten, welcher Winkel α mit

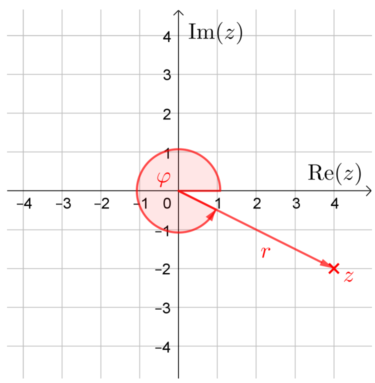
$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

berechnet wird. Stelle rechts mithilfe von α jeweils eine Formel für das Argument φ der komplexen Zahl auf.

$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{im 1. Quadranten} \\ 180^\circ - \alpha & \text{im 2. Quadranten} \\ 180^\circ + \alpha & \text{im 3. Quadranten} \\ 360^\circ - \alpha & \text{im 4. Quadranten} \end{cases}$$

Komponentenform ⇝ Polarform

Zeichne die komplexe Zahl $z = 4 - 2 \cdot i$ rechts ein, und wandle sie in Polarform um.



$$r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}472...$$

$$\varphi = 360^\circ - \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 333{,}4...^\circ \quad \text{(4. Quadrant)}$$

$$z = (4{,}472...; 333{,}4...^\circ)$$

Eulersche Formel

Man kann die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ auch für alle komplexen Zahlen x definieren. $e = 2{,}718\,28\ldots$

Dann gilt die **Eulersche Formel**: $\boldsymbol{e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß)

Daraus folgt für jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i = (r; \varphi)$ die Darstellung $\boldsymbol{z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}}$, denn:

$$z = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{=a} + \underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_{=b} \cdot i = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$$

Eulersche Idenität

Begründe, warum aus der Eulerschen Formel die **Eulersche Identität** $\boldsymbol{e^{i\cdot\pi} = -1}$ folgt.

Diese Identität stellt einen „überraschend einfachen" Zusammenhang zwischen den Zahlen/Konstanten e, i, π und 1 her.

$$e^{i\cdot\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1$$

Multiplikation und Division in Polarform

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ in Polarform.

- Beim Multiplizieren von z_1 und z_2 werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2;\ \varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Beim Dividieren von z_1 und z_2 werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2};\ \varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

Diese beiden Formeln kann man elementar aus den Summensätzen für Winkelfunktionen folgern oder mithilfe der Eulerschen Formel aus den Darstellungen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$ sowie den Rechenregeln für Potenzen.

Multiplikation und Division in Polarform

a) Berechne $z_1 \cdot z_2$ und $\dfrac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = (10; 320°)$ und $z_2 = (5; 70°)$.

$z_1 \cdot z_2 = (50; 390°) = (50; 30°)$ $\qquad$ $\dfrac{z_1}{z_2} = (2; 250°)$

b) Berechne das Produkt in Polarform, und übersetze die Rechnung in Komponentenform.

$$\underbrace{(1; 90°)}_{=i} \cdot \underbrace{(1; 90°)}_{=i} = \underbrace{(1; 180°)}_{=-1} \qquad i \cdot i = -1$$

Potenzieren in Polarform

Gegeben ist eine komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ in Polarform.

1) Erkläre, warum $z^2 = (r^2; 2 \cdot \varphi)$ gilt.

$$z^2 = (r; \varphi) \cdot (r; \varphi) = (r \cdot r; \varphi + \varphi) = (r^2; 2 \cdot \varphi) \checkmark$$

2) Erkläre, warum $\boldsymbol{z^n = (r^n; n \cdot \varphi)}$ gilt.

$$z^n = \underbrace{(r; \varphi) \cdot (r; \varphi) \cdot \cdots \cdot (r; \varphi)}_{n \text{ Faktoren}} = (\underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{n \text{ Faktoren}}; \underbrace{\varphi + \varphi + \cdots + \varphi}_{n \text{ Summanden}}) = (r^n; n \cdot \varphi) \checkmark$$

Potenzieren in Polarform

Berechne $(-6+8\cdot i)^7$ und stelle das Ergebnis in Komponentenform sowie in Polarform dar.

Hinweis: Wandle zuerst $-6+8\cdot i$ in Polarform um.

$z=-6+8\cdot i$ in Polarform:

$$r=\sqrt{6^2+8^2}=10 \qquad \varphi=180^\circ-\arctan\left(\frac{8}{6}\right)=126{,}8\ldots^\circ$$

$(-6+8\cdot i)^7$ in Polarform:

$$z^7=(10^7;7\cdot 126{,}8\ldots^\circ)=(10^7;888{,}0\ldots^\circ)=(10^7;168{,}0\ldots^\circ)$$

$(-6+8\cdot i)^7$ in Komponentenform:

$$a=10^7\cdot\cos(168{,}0\ldots^\circ)=-9\,784\,704$$

$$b=10^7\cdot\sin(168{,}0\ldots^\circ)=2\,063\,872 \implies (-6+8\cdot i)^7=-9\,784\,704+2\,063\,872\cdot i$$

Warum müssen der Realteil und der Imaginärteil von $(-6+8\cdot i)^7$ ganze Zahlen sein?

Wurzelziehen

Die Polynomgleichung $z^5=(32;150^\circ)$ hat über der Grundmenge $\mathbb{C}$ genau 5 Lösungen. Grad 5

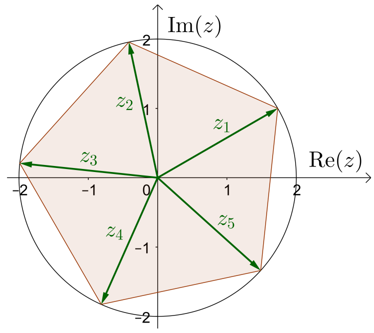
Jede Lösung ist eine komplexe Zahl $z=(r;\varphi)$ mit $z^5=(r^5;5\cdot\varphi)=(32;150^\circ)$.

1) Für den Betrag $r\in\mathbb{R}^+$ jeder Lösung muss also gelten:

$$r^5=32 \implies r=\sqrt[5]{32}=2$$

2) Für das Argument φ der rechts dargestellten Lösung z_1 gilt:

$$5\cdot\varphi=150^\circ \implies \varphi=30^\circ \implies z_1=(2;30^\circ)$$



3) Wenn wir das Argument φ von z_1 um $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$ vergrößern,

dann vergrößern wir das Argument von z_1^5 um $5\cdot 72^\circ=360^\circ$.

Oder:

$5\cdot\varphi=150^\circ+k\cdot 360^\circ \iff$

$\varphi=30^\circ+k\cdot 72^\circ \quad (k\in\mathbb{Z})$

So erhalten wir eine komplexe Zahl z_2 mit $z_1^5=z_2^5$, also eine weitere Lösung von $z^5=(32;150^\circ)$.

$$\implies z_2=(2;102^\circ) \implies z_3=(2;174^\circ) \implies z_4=(2;246^\circ) \implies z_5=(2;318^\circ)$$

Zwei weitere Lösungen

Berechne die Lösungen der Gleichung $z^3=-8$ über der Grundmenge $\mathbb{C}$, Grad 3

und zeichne sie rechts in der Zahlenebene ein.

Polarform: $-8=(8;180^\circ)$

$$z_1=\left(\sqrt[3]{8};\frac{180^\circ}{3}\right)=(2;60^\circ)$$

$$z_2=\left(2;60^\circ+\frac{360^\circ}{3}\right)=(2;180^\circ)=-2$$

$$z_3=(2;180^\circ+120^\circ)=(2;300^\circ)$$