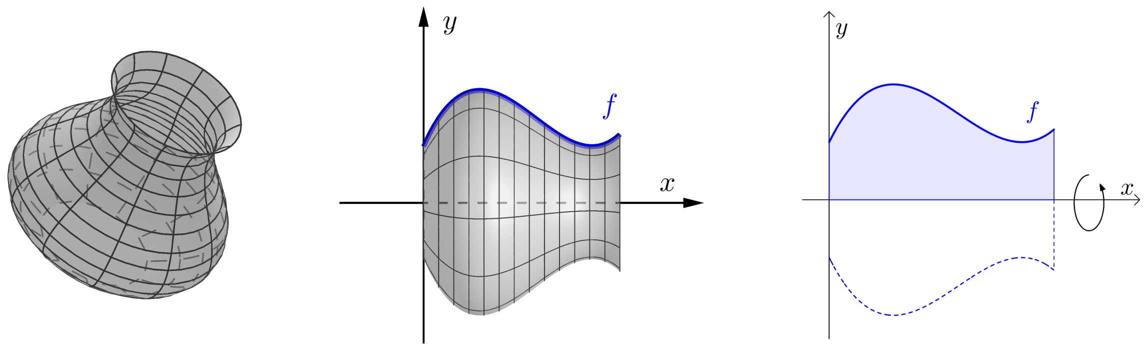
Rotationskörper

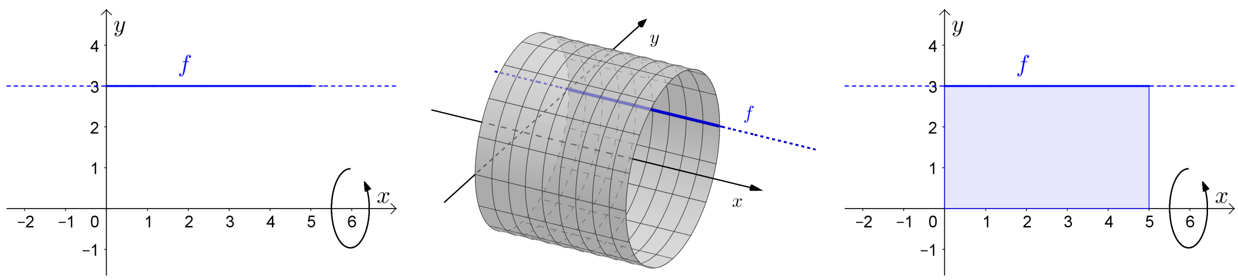
Die dargestellte Vase ist ein **Rotationskörper**:



Ihre Mantelfläche kann nämlich durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x-Achse erzeugt werden. Mithilfe der Integralrechnung können wir das Volumen solcher Rotationskörper berechnen.

Konstante Funktion

Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = 3$ rotiert im Intervall $[0; 5]$ um die x-Achse:

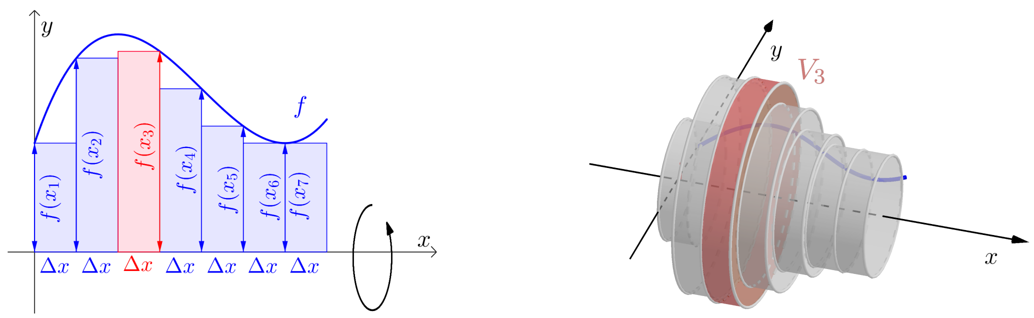


Dabei wird die Mantelfläche eines Drehzylinders mit Radius $r =$ ☐ und Höhe $h =$ ☐ erzeugt.

Für das Volumen V dieses Rotationskörpers gilt also: $V =$ ☐

Untersumme

Wenn f keine konstante Funktion ist, zerlegen wir das Intervall in Teile mit gleicher Breite Δx. Wir nähern das Volumen – genau wie bei Flächeninhalten – durch eine Untersumme an:



Stelle mithilfe von x_3, Δx und f eine Formel für das Volumen V_3 des markierten Drehzylinders auf:

$$V_3 = \boxed{}$$

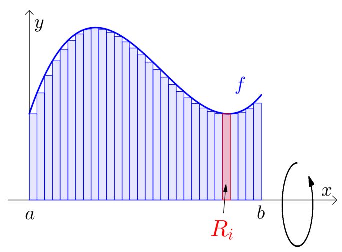
Die Untersumme ist das Gesamtvolumen der 7 Drehzylinder:

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_7 = \sum_{i=1}^{7} V_i = \sum_{i=1}^{7} \boxed{}$$

Integral als Grenzwert von Untersummen

Um die Annäherung an das tatsächliche Volumen zu verbessern, verfeinern wir die Zerlegung.
Der Grenzwert dieser Untersummen ist der *exakte* Flächeninhalt A bzw. das *exakte* Volumen V.

Im Bild unten nähern wir den Flächeninhalt durch n Rechtecke mit Breite Δx an:

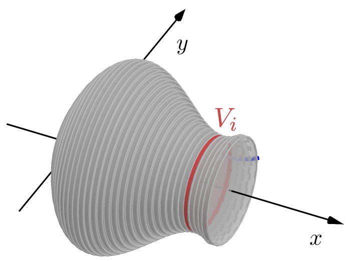


Einzelfläche: $R_i = f(x_i) \cdot \Delta x$

Gesamtfläche: $\sum_{i=1}^{n}$ ______

Grenzwert: $A = \int_a^b$ ______

Im Bild unten nähern wir das Volumen durch n Drehzylinder mit Höhe Δx an:



Einzelvolumen: $V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Gesamtvolumen: $\sum_{i=1}^{n}$ ______

Grenzwert: $V = \int_a^b$ ______

Volumen von Rotationskörpern (x-Achse)

Der Graph einer stetigen Funktion $y = f(x)$ rotiert für $a \le x \le b$ um die **x-Achse**.

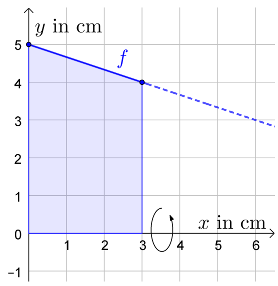
Für das **Volumen V_x** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $\boldsymbol{V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx}$

Das heißt: **1)** Ermittle $\pi \cdot f(x)^2$ und integriere nach x.

2) Die Integrationsgrenzen a und b lies auf der x-Achse ab.

Drehkegelstumpf

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.



1) Stelle eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(x) =$ ______

Wenn der Graph in $[0; 3]$ um die x-Achse rotiert, entsteht ein Drehkegelstumpf.

2) Berechne sein Volumen V mit der Formel für das Rotationsvolumen.

3) Berechne V mit der Formel für das Volumen von Drehkegeln.

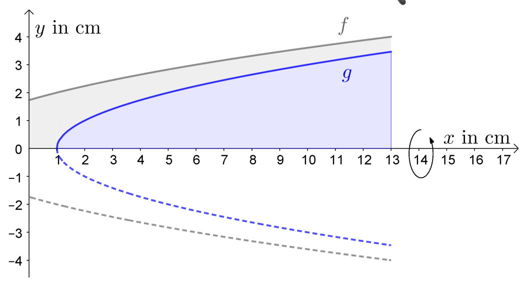
Wasserglas

Für das rechts dargestellte Wasserglas gilt:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{mit} \;\; 0 \leq x \leq 13$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{mit} \;\; 1 \leq x \leq 13$$

$x,\ f(x),\ g(x) \ldots$ Koordinaten in cm



1) Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.

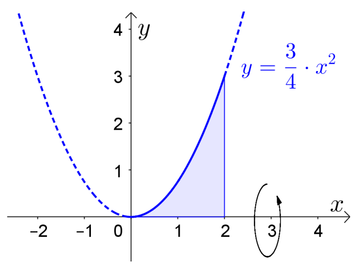
2) Das verwendete Glas hat die Dichte $\rho = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$. Berechne die Masse des leeren Wasserglases.

Rotation um die y-Achse

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$ liegen auf der dargestellten Parabel.

Für die Rotation um die y-Achse vertauschen wir die Rollen von x und y.

Rotation um die x-Achse ($0 \leq x \leq 2$)



$$V_x = \int_0^2 \underbrace{\pi \cdot y(x)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } x}} \,\mathrm{d}x$$

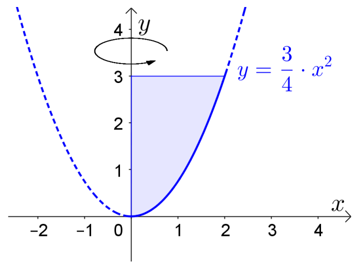
Wir integrieren $\pi \cdot y(x)^2$ nach x.

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der x-Achse ab.

$y^2 =$

$V_x =$

Rotation um die y-Achse ($0 \leq y \leq 3$)



$$V_y = \int_0^3 \underbrace{\pi \cdot x(y)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } y}} \,\mathrm{d}y$$

Wir integrieren $\pi \cdot x(y)^2$ nach y.

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der y-Achse ab.

$x^2 =$

$V_y =$

Volumen von Rotationskörpern (y-Achse)

Der Graph einer stetigen Funktion $x = g(y)$ rotiert für $c \leq y \leq d$ um die **y-Achse**.

Für das **Volumen V_y** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $\boldsymbol{V_y = \pi \cdot \int_c^d g(y)^2 \, dy}$

Das heißt: **1)** Forme die gegebene Gleichung nach x^2 um, und integriere $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot g(y)^2$ nach y.

2) Die Integrationsgrenzen c und d lies auf der y-Achse ab.

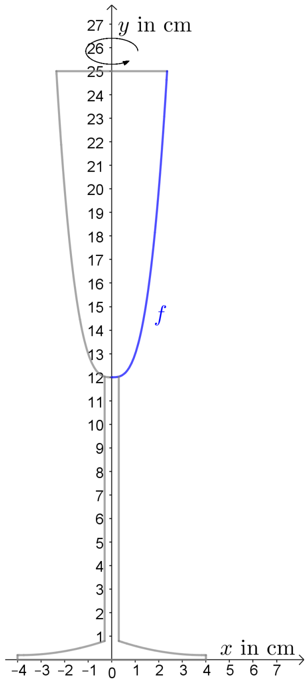
Sektglas

Für das rechts dargestellte Sektglas gilt:

$$f(x) = x^3 + 12 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{13}$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

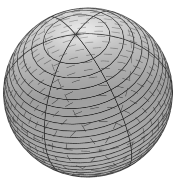
Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.



Kugelvolumen

Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

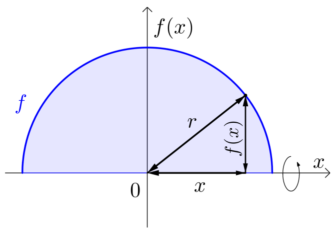
Eine Kugel mit Radius r kann als Rotationskörper um die x-Achse beschrieben werden:



1) Stelle mithilfe von r eine Funktionsgleichung von f auf.

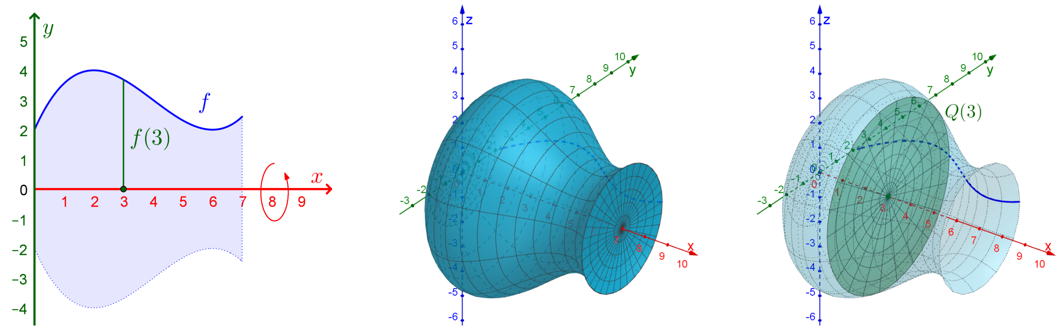
$f(x) = \boxed{}$

2) Leite mithilfe der Integralrechnung die obige Formel für das Kugelvolumen her.



Rotationsvolumen als bestimmtes Integral der Querschnittsfläche

Der Graph einer Funktion f in einer Variablen x rotiert im Intervall $[0; 7]$ um die x-Achse:



Der Querschnitt mit $x = 3$ ist ein Kreis mit Radius $\boxed{}$ und Flächeninhalt $Q(3) = \boxed{}$.

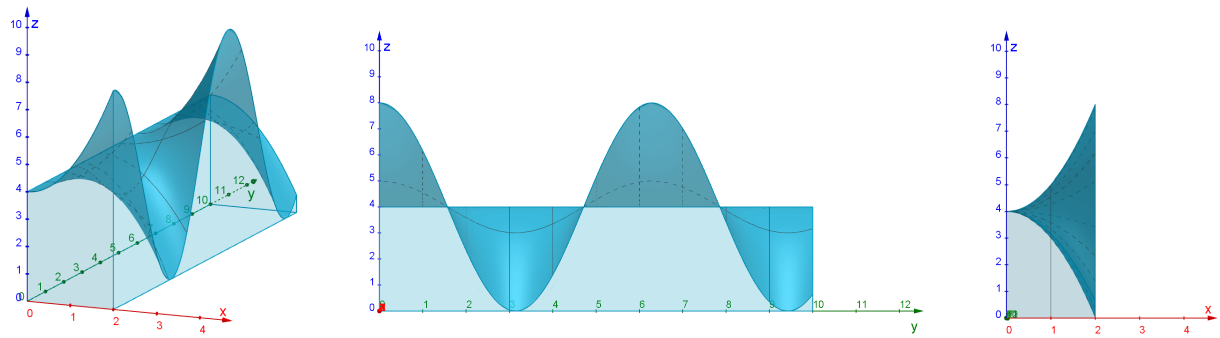
Für das Rotationsvolumen V gilt: $V = \int_0^7 \pi \cdot f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^7 Q(x) \,\mathrm{d}x$

Bestimmtes Integral der Querschnittsfläche

Für die Funktion f in zwei Variablen x und y gilt:

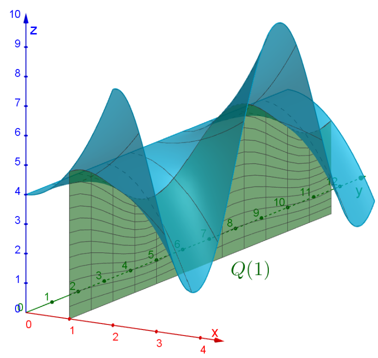
$$f(x; y) = x^2 \cdot \cos(y) + 4 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq 10$$

Der Graph der Funktion f ist eine Fläche im 3-dimensionalen Raum:



Der Funktionsgraph und die xy-Ebene schließen in diesem Bereich einen 3-dimensionalen Körper ein.

Für den Inhalt der Querschnittsfläche $Q(x)$ an der Stelle x gilt:



$$Q(x) = \int_0^{10} f(x; y) \,\mathrm{d}y$$

Rechts ist $Q(1)$ dargestellt.

1) Ermittle $Q(x)$.

Für das Volumen V des 3-dimensionalen Körpers gilt: $V = \int_0^2 Q(x) \,\mathrm{d}x$

2) Ermittle das Volumen V (alle Koordinaten in cm).