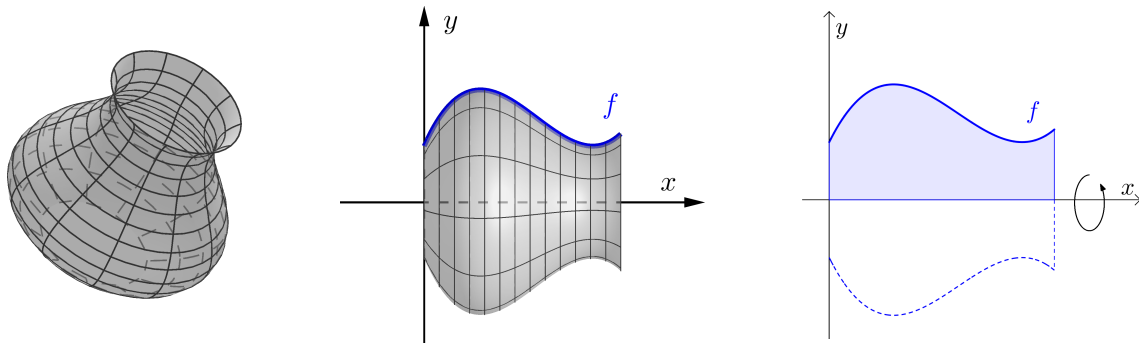




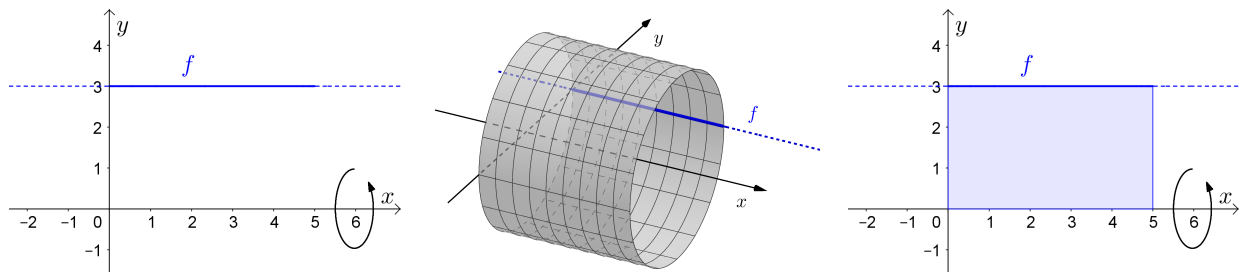
Die dargestellte Vase ist ein **Rotationskörper**:



Ihre Mantelfläche kann nämlich durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x -Achse erzeugt werden. Mithilfe der **Integralrechnung** können wir das Volumen solcher Rotationskörper berechnen.



Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = 3$ rotiert im Intervall $[0; 5]$ um die x -Achse:

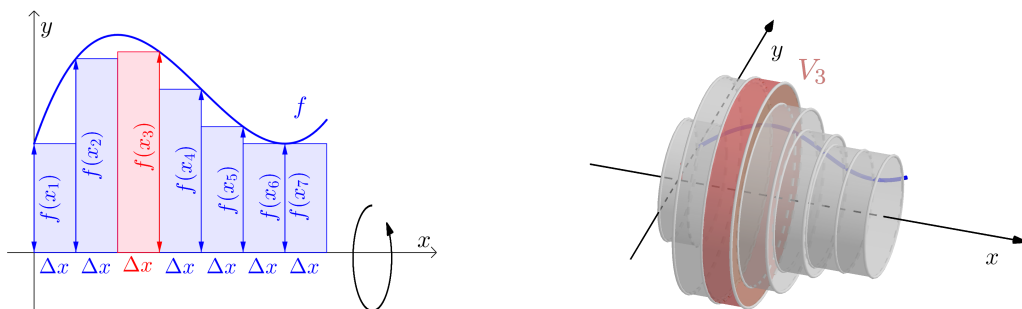


Dabei wird die Mantelfläche eines **Drehzylinders** mit Radius $r =$ und Höhe $h =$ erzeugt.

Für das Volumen V dieses Rotationskörpers gilt also: $V =$



Wenn f keine konstante Funktion ist, zerlegen wir das Intervall in Teile mit gleicher Breite Δx . Wir nähern das Volumen – genau wie bei Flächeninhalten – durch eine **Untersumme** an:



Stelle mithilfe von x_3 , Δx und f eine Formel für das Volumen V_3 des markierten Drehzylinders auf:

$V_3 =$

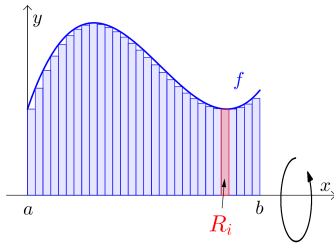
Die Untersumme ist das Gesamtvolumen der 7 Drehzylinder:

$V_1 + V_2 + \dots + V_7 = \sum_{i=1}^7 V_i = \sum_{i=1}^7$

Integral als Grenzwert von Untersummen



Um die Annäherung an das tatsächliche Volumen zu verbessern, verfeinern wir die Zerlegung. Der Grenzwert dieser Untersummen ist der *exakte* Flächeninhalt A bzw. das *exakte* Volumen V . Im Bild unten nähern wir den Flächeninhalt durch n Rechtecke mit Breite Δx an:

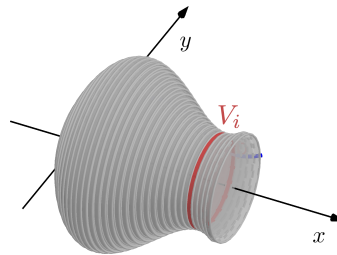


Einzelfläche: $R_i = f(x_i) \cdot \Delta x$

Gesamtfläche: $\sum_{i=1}^n$

Grenzwert: $A = \int_a^b$

Im Bild unten nähern wir das Volumen durch n Drehzylinder mit Höhe Δx an:



Einzelvolumen: $V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Gesamtvolumen: $\sum_{i=1}^n$

Grenzwert: $V = \int_a^b$

Volumen von Rotationskörpern (x -Achse)



Der Graph einer **stetigen** Funktion $y = f(x)$ rotiert für $a \leq x \leq b$ um die **x -Achse**.

Für das **Volumen V_x** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$

- Das heißt: 1) Ermittle $\pi \cdot f(x)^2$ und integriere nach x .
 2) Die Integrationsgrenzen a und b lies auf der x -Achse ab.

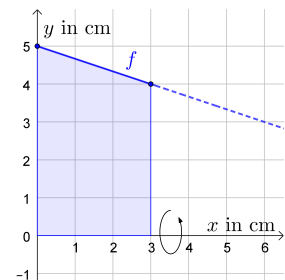
Drehkegelstumpf



Rechts ist der Graph einer **linearen Funktion f** dargestellt.

- 1) Stelle eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(x) =$



Wenn der Graph in $[0; 3]$ um die x -Achse rotiert, entsteht ein Drehkegelstumpf.

- 2) Berechne sein Volumen V mit der Formel für das Rotationsvolumen.

- 3) Berechne V mit der Formel für das Volumen von **Drehkegeln**.

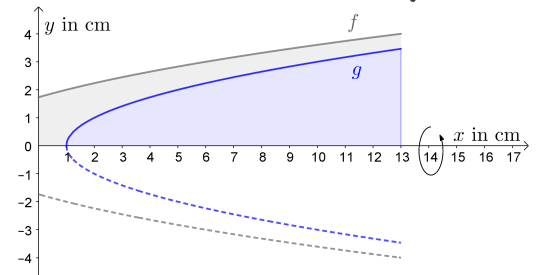
Für das rechts dargestellte Wasserglas gilt:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 13$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{mit } 1 \leq x \leq 13$$

$x, f(x), g(x) \dots$ Koordinaten in cm

1) Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.

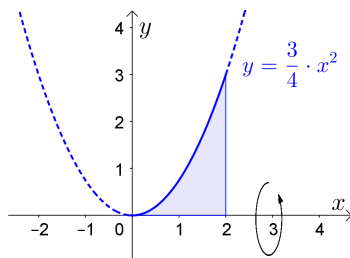


2) Das verwendete Glas hat die Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$. Berechne die Masse des leeren Wasserglases.

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$ liegen auf der dargestellten **Parabel**.

Für die Rotation um die y -Achse vertauschen wir die Rollen von x und y .

Rotation um die x -Achse ($0 \leq x \leq 2$)



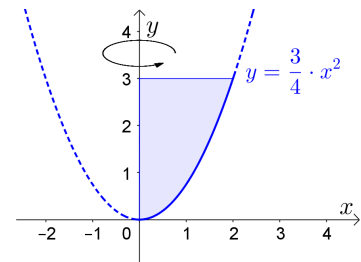
$$V_x = \int_0^2 \underbrace{\pi \cdot y(x)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } x}} dx$$

Wir integrieren $\pi \cdot y(x)^2$ nach x .
Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der x -Achse ab.

$$y^2 = \boxed{}$$

$$V_x = \boxed{}$$

Rotation um die y -Achse ($0 \leq y \leq 3$)



$$V_y = \int_0^3 \underbrace{\pi \cdot x(y)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } y}} dy$$

Wir integrieren $\pi \cdot x(y)^2$ nach y .
Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der y -Achse ab.

$$x^2 = \boxed{}$$

$$V_y = \boxed{}$$

Volumen von Rotationskörpern (*y*-Achse)



MmF

Der Graph einer stetigen Funktion $x = g(y)$ rotiert für $c \leq y \leq d$ um die ***y*-Achse**.

Für das **Volumen V_y** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $V_y = \pi \cdot \int_c^d g(y)^2 dy$

Das heißt: 1) Forme die gegebene Gleichung nach x^2 um, und integriere $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot g(y)^2$ nach y .

2) Die Integrationsgrenzen c und d lies auf der y -Achse ab.

Sektglas



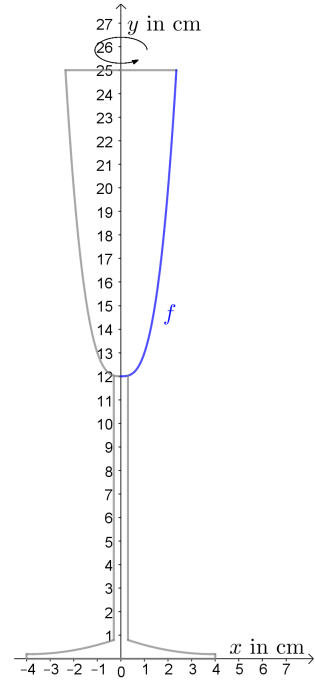
MmF

Für das rechts dargestellte Sektglas gilt:

$$f(x) = x^3 + 12 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{13}$$

$x, f(x)$... Koordinaten in cm

Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.



Kugelvolumen

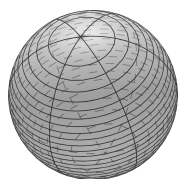


MmF

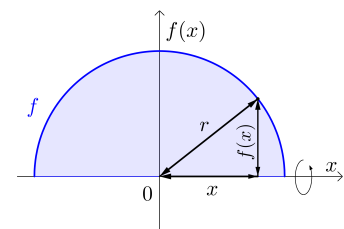
Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Eine Kugel mit Radius r kann als Rotationskörper um die x -Achse beschrieben werden:

1) Stelle mithilfe von r eine Funktionsgleichung von f auf.



$f(x) =$

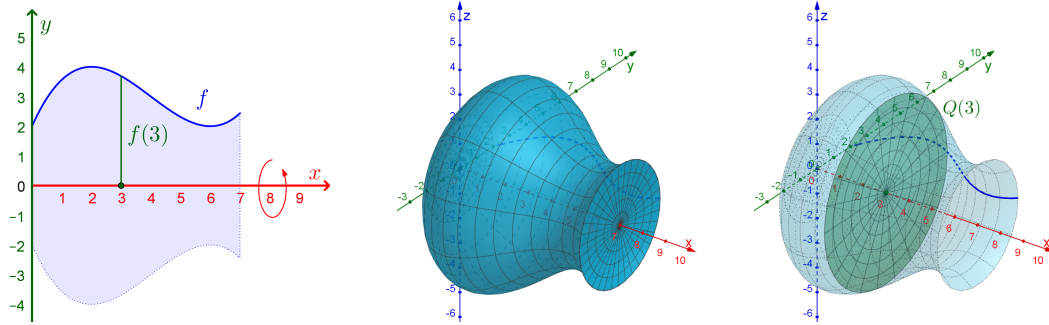


2) Leite mithilfe der Integralrechnung die obige Formel für das Kugelvolumen her.

Rotationsvolumen als bestimmtes Integral der Querschnittsfläche



Der Graph einer Funktion f in einer Variablen x rotiert im Intervall $[0; 7]$ um die x -Achse:



Der Querschnitt mit $x = 3$ ist ein Kreis mit Radius und Flächeninhalt $Q(3) =$.

Für das Rotationsvolumen V gilt: $V = \int_0^7 \pi \cdot f(x)^2 dx = \int_0^7 Q(x) dx$

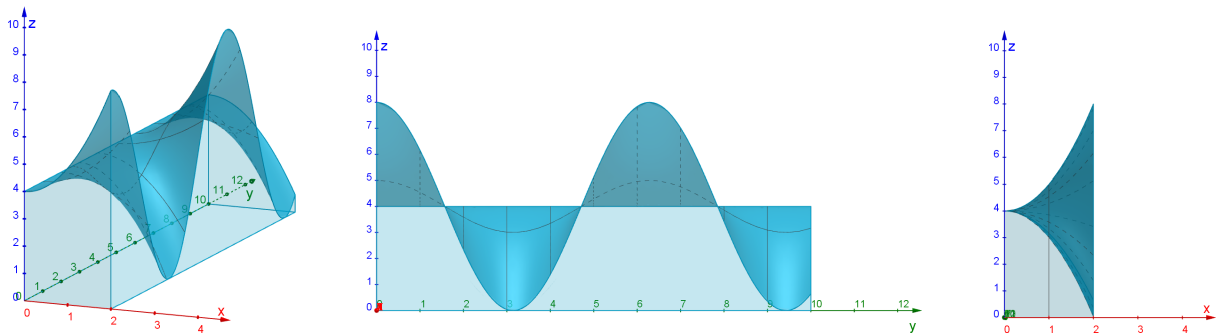
Bestimmtes Integral der Querschnittsfläche



Für die Funktion f in zwei Variablen x und y gilt:

$$f(x; y) = x^2 \cdot \cos(y) + 4 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 10$$

Der Graph der Funktion f ist eine Fläche im 3-dimensionalen Raum:



Der Funktionsgraph und die xy -Ebene schließen in diesem Bereich einen 3-dimensionalen Körper ein.

Für den Inhalt der Querschnittsfläche $Q(x)$ an der Stelle x gilt:

$$Q(x) = \int_0^{10} f(x; y) dy \quad \text{Rechts ist } Q(1) \text{ dargestellt.}$$

1) Ermittle $Q(x)$.

Für das Volumen V des 3-dimensionalen Körpers gilt: $V = \int_0^2 Q(x) dx$

2) Ermittle das Volumen V (alle Koordinaten in cm).

