

In der Differentialrechnung haben wir **Ableitungsfunktionen** ermittelt.

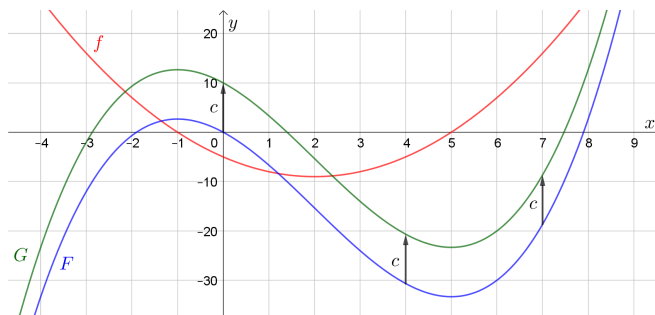
In der Integralrechnung ermitteln wir zu einer Funktion f eine Funktion F , die $F' = f$ erfüllt.
Eine solche Funktion F nennen wir **Stammfunktion von f** .

Ermittle eine Stammfunktion F von $f(x) = 8 \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - 42$. **Erinnere** dich, dass $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt.

$$F(x) = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} - 42 \cdot x = 2 \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{10} \cdot x^2 - 42 \cdot x$$

Hat f auch andere Stammfunktionen?

Die Graphen der Funktionen F und G unterscheiden sich um eine Verschiebung in vertikaler Richtung.
Der Graph von G entsteht durch Verschiebung des Graphen von F um $c = 10$ Einheiten nach oben.



An jeder Stelle x gilt also:

$$G(x) = F(x) + 10$$

Die Steigung bleibt dabei an jeder Stelle gleich.
An jeder Stelle x gilt also:

$$G'(x) = F'(x)$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist also auch $G = F + c$ eine Stammfunktion von f .

Tatsächlich unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen einer **stetigen** Funktion auf einem Intervall nur um eine Konstante.

Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + \frac{1}{2}$, die $F(4) = 2$ erfüllt.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + c$$

$$F(4) = 2 \implies \frac{4^4}{4} - 3 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + c = 2 \implies c = -16$$

$$\implies F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - 16$$


Ermittle jene Funktion f , die $f''(x) = 18 \cdot x$ sowie $f(0) = -2$ und $f(1) = 5$ erfüllt.

$$f''(x) = 18 \cdot x \implies f'(x) = 9 \cdot x^2 + c \implies f(x) = 3 \cdot x^3 + c \cdot x + d$$

$$f(0) = -2 \implies d = -2$$

$$f(1) = 5 \implies 3 + c - 2 = 5 \implies c = 4$$

$$\implies f(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x - 2$$

Stammfunktion einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v 

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Bremsung gilt:

$$v(t) = 18 - 6 \cdot t$$

t ... Zeit ab Beginn der Bremsung in Sekunden ($t \geq 0$)

$v(t)$... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s



- 1) Wie viele Sekunden dauert es, bis das Auto still steht?

$$v(t) = 0 \iff 18 - 6 \cdot t = 0 \iff t = 3 \text{ s}$$

- 2) Für die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s gilt $s'(t) = v(t)$ und $s(0) = 0 \text{ m}$.
Ermittle eine Funktionsgleichung von s .


$$s(t) = 18 \cdot t - 3 \cdot t^2 + c$$

$$s(0) = 0 \implies c = 0 \implies s(t) = 18 \cdot t - 3 \cdot t^2$$

- 3) Berechne die absolute Änderung der Weg-Zeit-Funktion s im Intervall $[0 \text{ s}; 3 \text{ s}]$.
Interpretiere das Ergebnis unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.

$$s(3) - s(0) = 27 - 0 = 27 \text{ m} \quad \text{Der Bremsweg des Autos hat die Länge 27 m.}$$

Allgemein hat die absolute Änderung $F(b) - F(a)$ einer Stammfunktion F von f auch eine grafische Bedeutung für f .
Mehr dazu findest am [Arbeitsblatt – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung](#).

 Stammfunktion einer Beschleunigung-Zeit-Funktion a 

Für die Beschleunigung-Zeit-Funktion a eines Autos gilt:

$$a(t) = \frac{1}{2} \cdot t + 2$$

t ... Zeit ab Beginn der Beschleunigung in Sekunden ($t \geq 0$)

$a(t)$... Beschleunigung zum Zeitpunkt t in m/s^2



- 1) Für die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt $v'(t) = a(t)$ und $v(0) = 15 \text{ m/s}$.
Ermittle eine Funktionsgleichung von v .

$$v(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + 2 \cdot t + c$$

$$v(0) = 15 \implies c = 15 \implies v(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + 2 \cdot t + 15$$

- 2) Berechne die absolute Änderung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Intervall $[0 \text{ s}; 6 \text{ s}]$.
Interpretiere das Ergebnis unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.

$$v(6) - v(0) = 36 - 15 = 21 \text{ m/s} \quad \text{Das Auto beschleunigt in } [0 \text{ s}; 6 \text{ s}] \text{ um } 21 \text{ m/s.}$$

- 3) Wie viele Meter legt das Auto im Intervall $[0 \text{ s}; 6 \text{ s}]$ zurück?

$$s'(t) = v(t) \implies s(t) = \frac{1}{12} \cdot t^3 + t^2 + 15 \cdot t$$

$$s(6) - s(0) = 144 - 0 = 144 \text{ m}$$



In der 1. Spalte der folgenden Tabelle aus der **Formelsammlung** sind elementare Funktionen aufgelistet.
 In der 2. Spalte ist jeweils die zugehörige Ableitungsfunktion angegeben.
 In der 3. Spalte ist jeweils eine zugehörige Stammfunktion angegeben.

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(x)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\cos(x))$
$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$	$G(x) = k \cdot F(x)$
$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$H(x) = F(x) \pm G(x)$
$g(x) = f(k \cdot x)$	$g'(x) = k \cdot f'(k \cdot x)$	$G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$



Ermittle alle Stammfunktionen F der gegebenen Funktion f .

a) $f(x) = 6 \cdot x^2 + \frac{6}{x^2} = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x^{-2} \implies F(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^{-1} + c$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} = x^{-3} + x^{-1} \implies F(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} + \ln(|x|) + c$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 5 = x^{\frac{1}{2}} + 5 \implies F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 5 \cdot x + c$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \implies F(x) = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{7}{3}} + c$

e) $f(x) = 4 \cdot e^x \implies F(x) = 4 \cdot e^x + c$

f) $f(x) = e^{4 \cdot x} \implies F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} + c$

g) $f(x) = 42 \cdot \cos(x) \implies F(x) = 42 \cdot \sin(x) + c$

h) $f(x) = \cos(42 \cdot x) \implies F(x) = \frac{1}{42} \cdot \sin(42 \cdot x) + c$

i) $f(x) = \frac{\sin(x)}{5} \implies F(x) = -\frac{\cos(x)}{5} + c$

j) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{5}\right) \implies F(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) + c$

Für das Ermitteln von Stammfunktionen verwenden manche auch die Schreibweise

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c$$

und sprechen vom **unbestimmten Integral**.

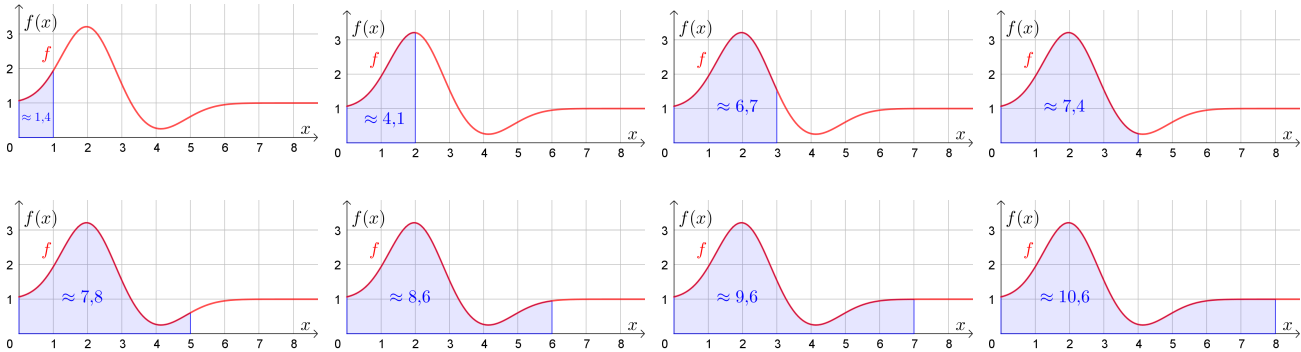
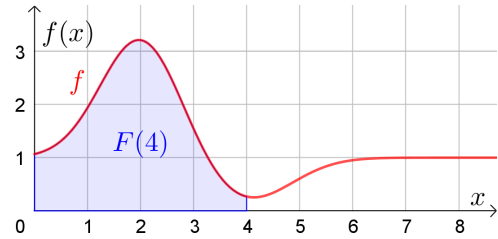


Ein Meilenstein der Mathematik ist die folgende Entdeckung aus dem 17. Jahrhundert:

Rechts ist der Graph einer **stetigen** Funktion f dargestellt.

$F(x)$ ist der Flächeninhalt, den der Graph von f mit der waagrechten Achse im Intervall $[0; x]$ einschließt.

Rechts ist zum Beispiel $F(4) \approx 7,4$ veranschaulicht – unten die Werte $F(1), F(2), F(3), \dots, F(8)$.

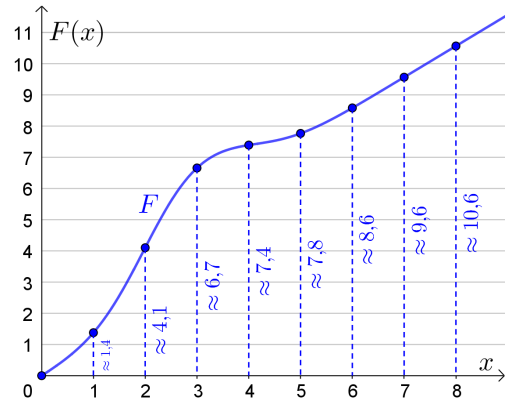


Der Graph der Funktion F ist rechts dargestellt.

F hat im dargestellten Bereich die folgenden Eigenschaften:

- F ist streng monoton wachsend.
- An der Stelle $x = 2$ hat die **Steigung von F** – also F' – ein lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 4$ hat die **Steigung von F** – also F' – ein lokales Minimum.

Tatsächlich ist F jene Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

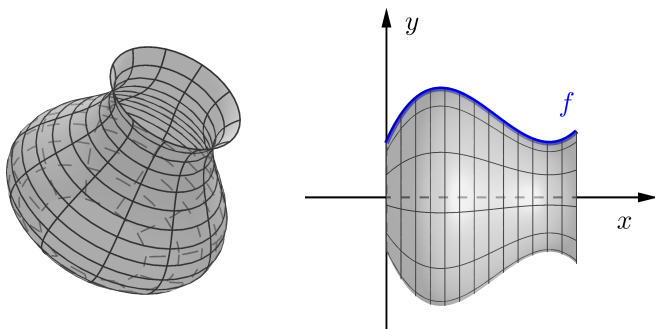
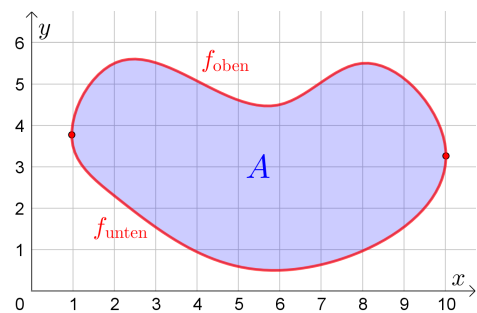


Mehr zu diesem entdeckten Zusammenhang zwischen der Berechnung von Flächeninhalten und Stammfunktionen erfährst du am [AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung](#).

Die rechts dargestellte Fläche wird von den Graphen der Funktionen f_{oben} und f_{unten} berandet.

Mithilfe von Stammfunktionen von f_{oben} bzw. f_{unten} und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir den Flächeninhalt A im *Handumdrehen* berechnen.

Mehr dazu erfährst du am [AB – Kulturtechnik Integration](#), am [AB – Bestimmtes Integral](#) und am [AB – Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen](#).



Die Kontur der links dargestellten Vase wird mit einer Funktion f modelliert.

Mithilfe einer Stammfunktion von f^2 und dem Hauptsatz können wir ihr Volumen im *Handumdrehen* berechnen.

Mehr dazu folgt am [AB – Rotationsvolumen](#).

