

Zeige ohne Taschenrechner, dass  $\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ) \neq \sin(60^\circ)$  gilt:

$$\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Summensätze für Winkelfunktionen



Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ :

i)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

ii)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

iii)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

Trigonometrische Identität



Allgemein gilt:  $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$

1) Begründe diese Behauptung für spitze Winkel  $\alpha$  mit den **Winkelfunktionen am Einheitskreis**.

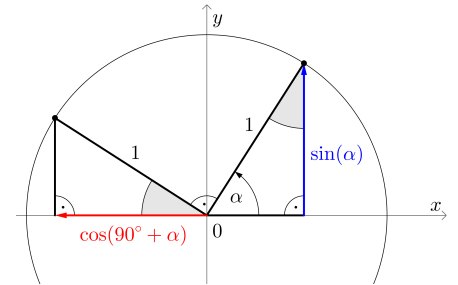
Die beiden grau markierten Winkel sind gleich groß, nämlich:

$$180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

Die beiden Dreiecke sind also zueinander kongruent.

Die  $x$ -Koordinate vom linken Punkt am Einheitskreis ist also betragsmäßig gleich groß wie die  $y$ -Koordinate vom rechten Punkt am Einheitskreis, nur mit anderem Vorzeichen.

Daraus folgt:  $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$



2) Begründe diese Behauptung mithilfe der Summensätze.

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \underbrace{\cos(90^\circ)}_{=0} \cdot \cos(\alpha) - \underbrace{\sin(90^\circ)}_{=1} \cdot \sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Summensätze für Winkelfunktionen



Für die Winkelfunktionen gilt: **1)**  $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$  **2)**  $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$  **3)**  $\tan(-\beta) = -\tan(\beta)$

Stelle jeweils mithilfe von  $\sin(\alpha)$ ,  $\sin(\beta)$ ,  $\cos(\alpha)$ ,  $\cos(\beta)$ ,  $\tan(\alpha)$  und  $\tan(\beta)$  eine Formel auf.

a)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

b)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

c)  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

Stelle jeweils mithilfe von  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$  und  $\tan(\alpha)$  eine Formel auf.

a)  $\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

b)  $\cos(2 \cdot \alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

c)  $\tan(2 \cdot \alpha) = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

Den folgenden Ausdruck kann man auch einfacher anschreiben.

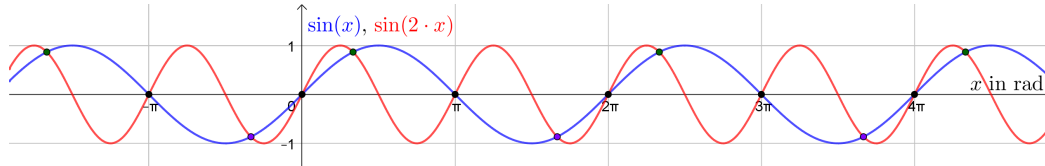
Stelle mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf und beweise sie.

$$\sin(2 \cdot \alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha) = 1 \quad \text{für alle Winkel } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha) &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \underbrace{\cos(\alpha) \cdot \tan(\alpha)}_{\sin(\alpha)} + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \\ &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

Löse die **goniometrische Gleichung**  $\sin(2 \cdot x) = \sin(x)$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ . (Winkel im **Bogenmaß**)

Gesucht sind also alle Schnittstellen der dargestellten Funktionen  $x \mapsto \sin(x)$  und  $x \mapsto \sin(2 \cdot x)$ :



Aus den Summensätzen folgt:  $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

Bevor wir beide Seiten der Gleichung

$$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x) \quad (\star)$$

durch  $\sin(x)$  dividieren, müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

**Fall 1:**  $\sin(x) = 0$

Jeder Winkel  $x$  mit dieser Eigenschaft, ist eine Lösung von  $(\star)$ , weil  $2 \cdot 0 \cdot \cos(x) = 0$  gilt.

Also sind alle Winkel  $x = k \cdot \pi$  rad mit  $k \in \mathbb{Z}$  Lösungen der Gleichung.

**Fall 2:**  $\sin(x) \neq 0$

In diesem Fall ist die Division durch  $\sin(x)$  eine **Äquivalenzumformung** und wir erhalten:

$$2 \cdot \cos(x) = 1 \iff \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Die „**Bergab-Lösungen**“ davon sind alle Winkel  $x = \arccos(\frac{1}{2}) + k \cdot 2 \cdot \pi = 1,047... + k \cdot 2 \cdot \pi$  rad.

Die „**Bergauf-Lösungen**“ davon sind alle Winkel  $x = 2 \cdot \pi - \arccos(\frac{1}{2}) + k \cdot 2 \cdot \pi = 5,235... + k \cdot 2 \cdot \pi$  rad.



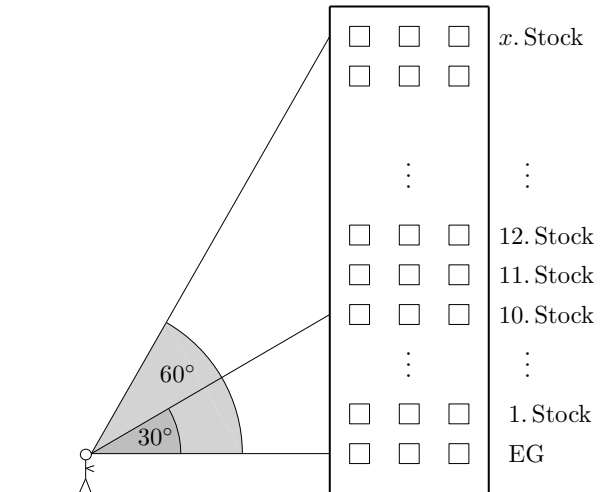
Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.  
Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel  $30^\circ$ .  
Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel  $60^\circ$ ?  
Alle Stockwerke sind gleich hoch und das Gebäude steht senkrecht.

$h \dots$  Höhe pro Stockwerk  
 $d \dots$  horizontale Entfernung vom Gebäude

$$I: \tan(30^\circ) = \frac{10 \cdot h}{d} \implies \frac{d}{h} = \frac{10}{\tan(30^\circ)}$$

$$II: \tan(60^\circ) = \frac{x \cdot h}{d} \\ \implies x = \frac{\tan(60^\circ) \cdot d}{h} = \frac{\tan(60^\circ) \cdot 10}{\tan(30^\circ)} = 30$$

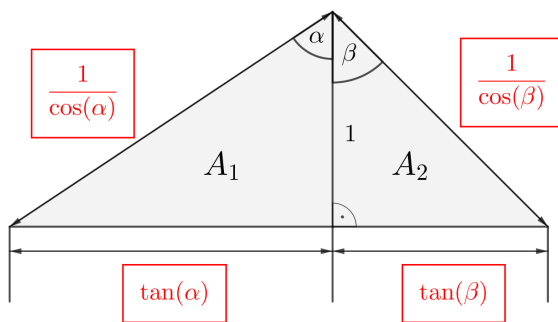
Man sieht den 30. Stock unter dem Höhenwinkel  $60^\circ$ .



Beweis eines Summensatzes



Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .



- 1) Beschrifte die vier Längen links mithilfe von  $\alpha$  und  $\beta$ .
- 2) Stelle mithilfe von  $\alpha$  und  $\beta$  eine Formel für die Flächeninhalte  $A_1$  und  $A_2$  auf:

$$A_1 = \frac{\tan(\alpha)}{2} \quad A_2 = \frac{\tan(\beta)}{2}$$

- 3) Stelle mithilfe der **trigonometrischen Flächenformel** eine Formel für  $A_1 + A_2$  auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$$

- 4) Begründe mithilfe **2)** und **3)** den Summensatz

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für alle spitzen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)}{2} + \frac{\tan(\beta)}{2}$$

$$\implies \sin(\alpha + \beta) = \underbrace{\tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}_{=\sin(\alpha)} \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \underbrace{\tan(\beta) \cdot \cos(\beta)}_{=\sin(\beta)} \quad \checkmark$$

