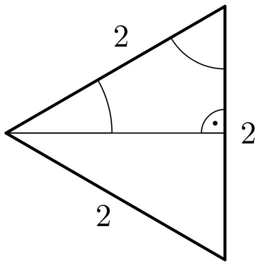
$\sin(\alpha+\beta)$ / $\sin(\alpha)+\sin(\beta)$



Zeige ohne Taschenrechner, dass $\sin(30^\circ)+\sin(30^\circ)\neq\sin(60^\circ)$ gilt:

$\sin(30^\circ)+\sin(30^\circ) =$ ______

$\sin(30^\circ+30^\circ) =$ ______

Summensätze für Winkelfunktionen

Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel α und β:

i) $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$

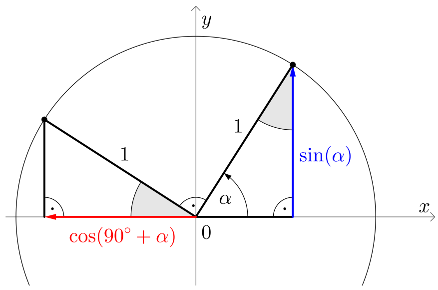
ii) $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$

iii) $\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$

Trigonometrische Identität

Allgemein gilt: $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin(\alpha)$

1) Begründe diese Behauptung für spitze Winkel α mit den Winkelfunktionen am Einheitskreis.



2) Begründe diese Behauptung mithilfe der Summensätze.

$\cos(90^\circ+\alpha) =$ ______

Summensätze für Winkelfunktionen

Für die Winkelfunktionen gilt: **1)** $\sin(-\beta)=-\sin(\beta)$ **2)** $\cos(-\beta)=\cos(\beta)$ **3)** $\tan(-\beta)=-\tan(\beta)$

Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$ eine Formel auf.

a) $\sin(\alpha-\beta) =$ ______

b) $\cos(\alpha-\beta) =$ ______

c) $\tan(\alpha-\beta) =$ ______

Doppelwinkelfunktionen

Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ eine Formel auf.

a) $\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \boxed{}$

b) $\cos(2 \cdot \alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \boxed{}$

c) $\tan(2 \cdot \alpha) = \tan(\alpha + \alpha) = \boxed{}$

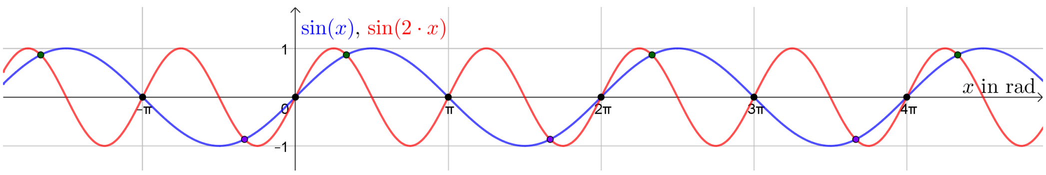
Vermutung → Beweis

Den folgenden Ausdruck kann man auch einfacher anschreiben.
Stelle mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf und beweise sie.

$\sin(2 \cdot \alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha) = \boxed{}$ für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$

Goniometrische Gleichung

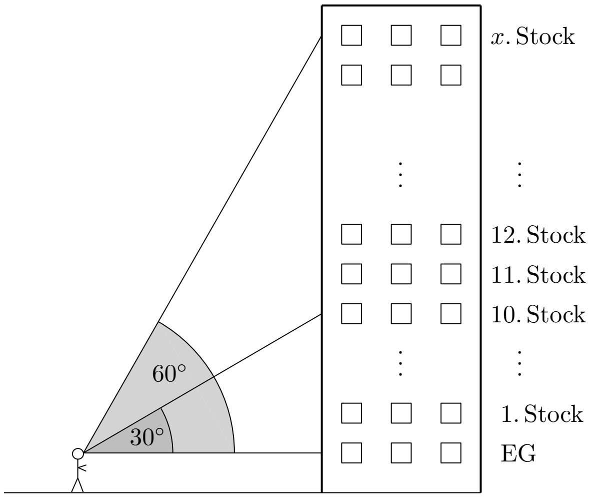
Löse die goniometrische Gleichung $\sin(2 \cdot x) = \sin(x)$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$. (Winkel im Bogenmaß)
Gesucht sind also alle Schnittstellen der dargestellten Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto \sin(2 \cdot x)$:



Steigungswinkel verdoppeln

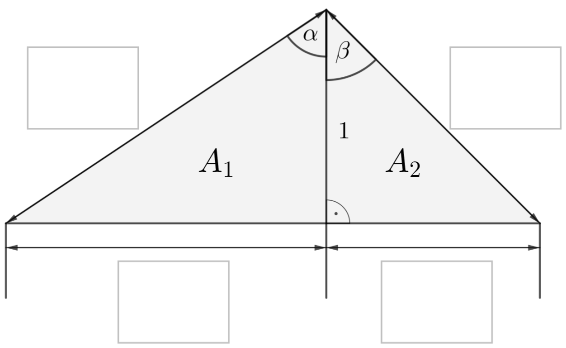
Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.
Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 30°.
Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 60°?

Alle Stockwerke sind gleich hoch und das Gebäude steht senkrecht.



Beweis eines Summensatzes

Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel α und β.



1) Beschrifte die vier Längen links mithilfe von α und β.

2) Stelle mithilfe von α und β eine Formel für die Flächeninhalte A_1 und A_2 auf:

$A_1 = \frac{\square}{\square}$ $\qquad$ $A_2 = \frac{\square}{\square}$

3) Stelle mithilfe der trigonometrischen Flächenformel eine Formel für $A_1 + A_2$ auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\square}{\square}$$

4) Begründe mithilfe **2)** und **3)** den Summensatz

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für alle spitzen Winkel α und β.