


Zeige ohne Taschenrechner, dass $\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ) \neq \sin(60^\circ)$ gilt:

$\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ) =$

$\sin(30^\circ + 30^\circ) =$


Summensätze für Winkelfunktionen 

Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel α und β :

i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

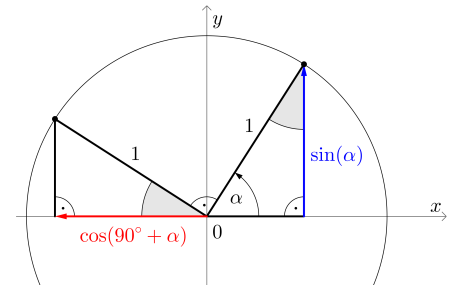
ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

iii) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

Trigonometrische Identität 

Allgemein gilt: $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$

1) Begründe diese Behauptung für spitze Winkel α mit den **Winkelfunktionen am Einheitskreis**.



2) Begründe diese Behauptung mithilfe der **Summensätze**.

$\cos(90^\circ + \alpha) =$

Summensätze für Winkelfunktionen 

Für die Winkelfunktionen gilt: **1)** $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ **2)** $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ **3)** $\tan(-\beta) = -\tan(\beta)$

Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$ eine Formel auf.

a) $\sin(\alpha - \beta) =$

b) $\cos(\alpha - \beta) =$

c) $\tan(\alpha - \beta) =$

Doppelwinkelfunktionen



Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ eine Formel auf.

a) $\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(\alpha + \alpha) =$

b) $\cos(2 \cdot \alpha) = \cos(\alpha + \alpha) =$

c) $\tan(2 \cdot \alpha) = \tan(\alpha + \alpha) =$

Vermutung → Beweis



Den folgenden Ausdruck kann man auch einfacher anschreiben.

Stelle mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf und beweise sie.

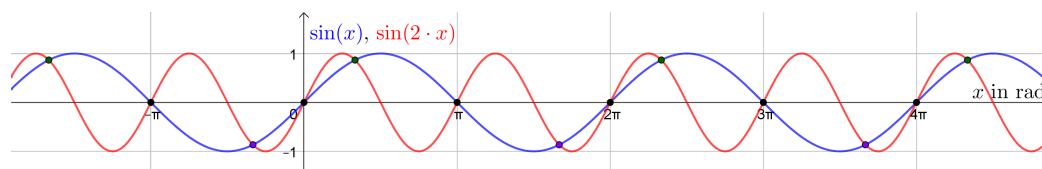
$\sin(2 \cdot \alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha) =$ für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$

Goniometrische Gleichung



Löse die **goniometrische Gleichung** $\sin(2 \cdot x) = \sin(x)$ über der Grundmenge \mathbb{R} . (Winkel im **Bogenmaß**)

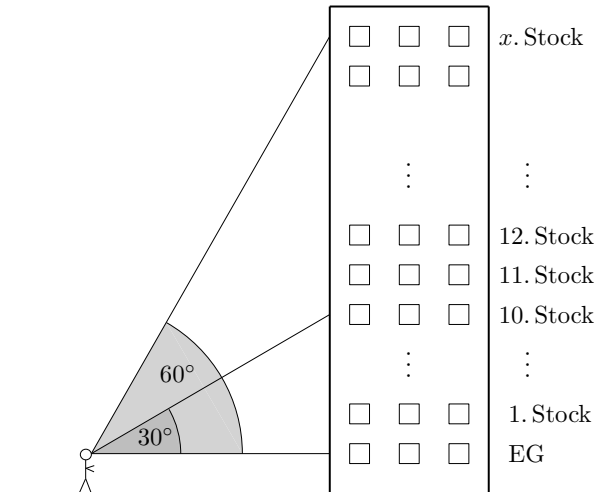
Gesucht sind also alle Schnittstellen der dargestellten Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto \sin(2 \cdot x)$:



Steigungswinkel verdoppeln



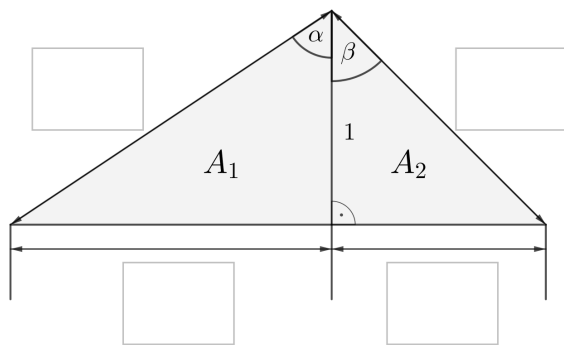
Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.
 Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 30° .
 Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 60° ?
 Alle Stockwerke sind gleich hoch und das Gebäude steht senkrecht.



Beweis eines Summensatzes



Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel α und β .



- 1) Beschrifte die vier Längen links mithilfe von α und β .
- 2) Stelle mithilfe von α und β eine Formel für die Flächeninhalte A_1 und A_2 auf:

$$A_1 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad A_2 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

- 3) Stelle mithilfe der **trigonometrischen Flächenformel** eine Formel für $A_1 + A_2$ auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

- 4) Begründe mithilfe 2) und 3) den Summensatz

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für alle spitzen Winkel α und β .

