Vektoren im Raum

Wie Vektoren in der Ebene definieren wir **Vektoren im Raum** analog als Zahlentripel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Vektorrechnen

Mit Vektoren im Raum rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

- **Addition von Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

Spitze minus Anfangspunkt

Die Punkte $A = (5 \mid 3 \mid 0)$ und $B = (2 \mid 4 \mid 4)$ sind rechts im 3-dimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet.

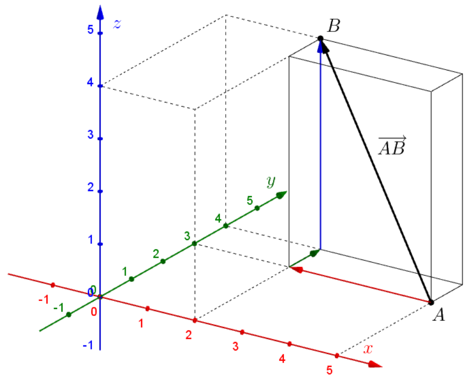
Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ festgelegt.

Ermittle seine Komponenten: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ gilt:

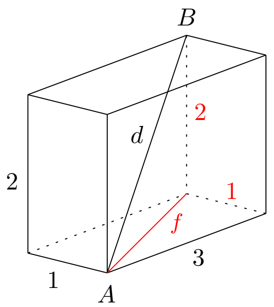
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$$

„Spitze minus Anfangspunkt“



Die Punkte A und B spannen dabei einen Quader auf.
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist als Raumdiagonale dieses Quaders eingezeichnet.
Die Beträge der 3 Komponenten von $\overrightarrow{AB}$ sind die Seitenlängen dieses Quaders.

Raumdiagonale eines Quaders



Berechne die Entfernung d der Eckpunkte A und B des dargestellten Quaders.

$$f = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$d = \sqrt{f^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} = 3{,}741...$$

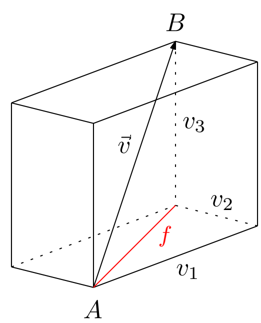
Betrag eines Vektors

Für die **Länge** (den **Betrag**) des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

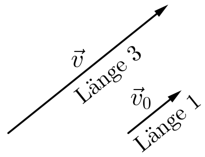
Leite diese Formel her:

$$f = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \implies |\vec{v}| = \sqrt{f^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Einheitsvektor

Der Vektor $\vec{v_0} = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v}$.



Für seine Länge gilt: $|\vec{v_0}| = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen $\vec{v_0}$ den **Einheitsvektor von** $\vec{v}$.

Schnittpunkte: Gerade – Kugel

Die Punkte $A = (3 \mid 6 \mid -2)$ und $B = (1 \mid -8 \mid 3)$ liegen auf einer Gerade (Koordinaten in cm). Berechne jene beiden Punkte P und Q auf dieser Gerade, die 4,2 cm vom Punkt A entfernt sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -8-6 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 14^2 + 5^2} = 15\,\text{cm}$

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{4{,}2}{15} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -0{,}56 \\ -3{,}92 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$

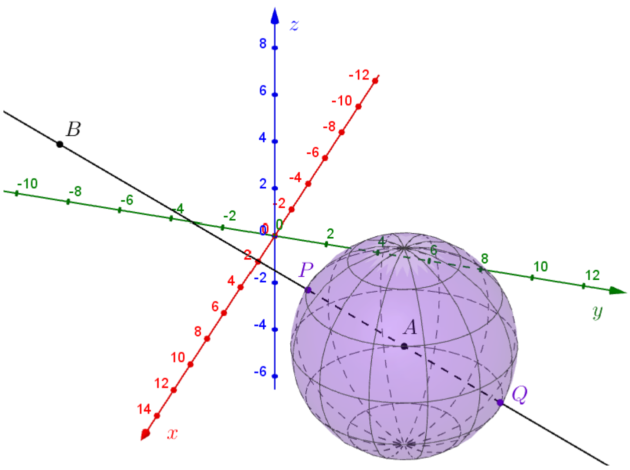
$P = A + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}56 \\ -3{,}92 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}44 \\ 2{,}08 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} =$

$= (2{,}44 \mid 2{,}08 \mid -0{,}6)$

$\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ 3{,}92 \\ -1{,}4 \end{pmatrix}$

$Q = A + \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ 3{,}92 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}56 \\ 9{,}92 \\ -3{,}4 \end{pmatrix} =$

$= (3{,}56 \mid 9{,}92 \mid -3{,}4)$



Skalarprodukt

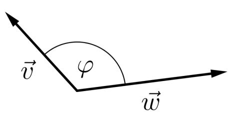
Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3}$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.
Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ können wir wie in der Ebene mit der **Vektor-Winkel-Formel** berechnen:



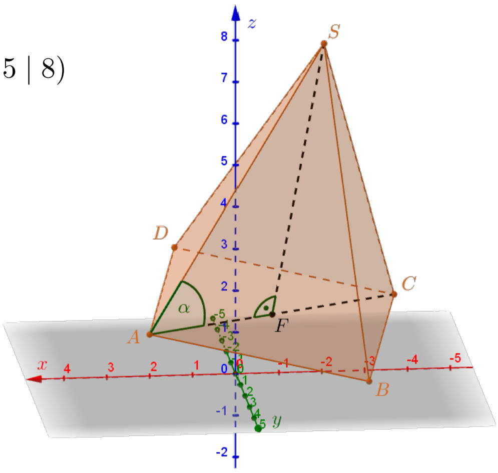
$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}} \qquad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Winkel φ gilt also wie in der Ebene auch im Raum:
$$\begin{cases} 0° \leq \varphi < 90° & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \\ \varphi = 90° & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \\ 90° < \varphi \leq 180° & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \end{cases}$$

Pyramide

Rechts ist eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $ABCD$ und Spitze S dargestellt. Dabei gilt (Koordinaten in cm):

$A = (2 \mid 0 \mid 1),\ B = (-3 \mid 1 \mid 0),\ C = (-4 \mid -3 \mid 1),\ S = (-2 \mid 0{,}5 \mid 8)$



1) Berechne den Eckpunkt D.

2) Berechne den eingezeichneten Winkel $\alpha = \angle CAS$.

Der Fußpunkt F liegt in der Mitte der Grundfläche.

3) Berechne den Fußpunkt F.

4) Berechen das Volumen der Pyramide.

1) $D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \mid -4 \mid 2)$

2) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{45}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{4^2 + 0{,}5^2 + 7^2} = \sqrt{65{,}25}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = 24 - 1{,}5 + 0 = 22{,}5$

$\implies \alpha = \arccos\left(\dfrac{22{,}5}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{65{,}25}}\right) = 65{,}46...^\circ$

3) $F = A + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{A + C}{2} = (-1 \mid -1{,}5 \mid 1)$

4) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \implies G = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{486}$

$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \implies h = |\overrightarrow{FS}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{54}$

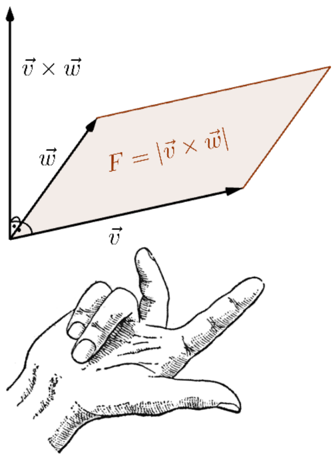
$\implies V = \dfrac{G \cdot h}{3} = 54\,\text{cm}^3$

Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „$\vec{v}$ kreuz $\vec{w}$“
„Kreuzprodukt“



Das Vektorprodukt hat die folgenden drei Eigenschaften:

1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf $\vec{v}$ und normal auf $\vec{w}$.

Damit ist die Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Orientierung.

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.

Lege den Daumen deiner *rechten* Hand auf $\vec{v}$ und den Zeigefinger auf $\vec{w}$.
Wenn du den Mittelfinger abbiegst, dann kannst du ihn auf den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ legen.
Damit ist die Orientierung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Länge.

3) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt F dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

Damit ist die Länge von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt.

Das Vektorprodukt ist *nicht* kommutativ. Es gilt nämlich:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Lege umgekehrt den Daumen deiner rechten Hand auf $\vec{w}$ und den Zeigefinger auf $\vec{v}$.

Vektorprodukt

Berechne das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Überprüfe, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ tatsächlich einen rechten Winkel mit den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einschließt.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-15 \\ -(0-3) \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 \checkmark$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 - 15 + 8 = 0 \checkmark$$

Dreieck

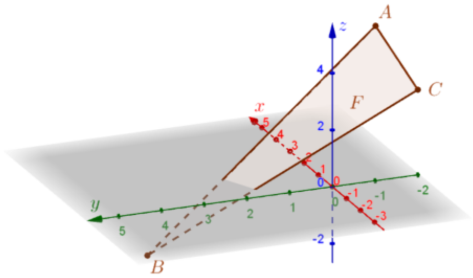
Das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid -2 \mid 4)$, $B = (1 \mid 4 \mid -2)$ und $C = (0 \mid -2 \mid 3)$ ist dargestellt.
(Einheiten in cm)

1) Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks.

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ -(2-18) \\ 0-(-18) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$

2) $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 16^2 + 18^2} = 12{,}40\ldots\,\text{cm}^2$



Drei verschiedene Multiplikationen

i) Bei $\boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar $r \in \mathbb{R}$ multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

ii) Beim Skalarprodukt $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Skalar**.

iii) Beim Vektorprodukt $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

Skalar oder Vektor?

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ im Raum und ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.
Ist das Ergebnis der Rechnung jeweils ein Skalar oder ein Vektor?

a) $\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \times \vec{c}}_{\text{Ergebnis: Vektor}}$

b) $\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Skalar}} \cdot \vec{c}}_{\text{Ergebnis: Vektor}}$

c) $\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \cdot \vec{c}}_{\text{Ergebnis: Skalar}}$

d) $\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \cdot r}_{\text{Ergebnis: Vektor}}$

e) $\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Skalar}} \cdot r}_{\text{Ergebnis: Skalar}}$