

Wie **Vektoren in der Ebene** definieren wir **Vektoren im Raum** analog als Zahlentripel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Mit Vektoren im Raum rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

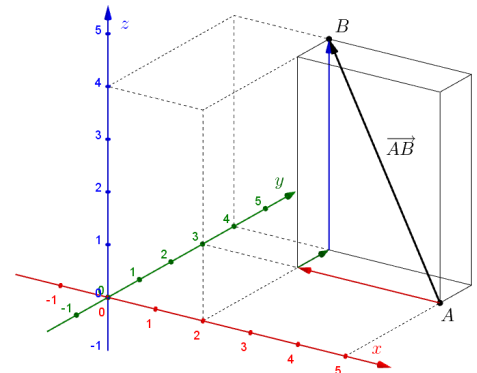
- **Addition von Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

Die Punkte $A = (\square | \square | \square)$ und $B = (\square | \square | \square)$ sind rechts im 3-dimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet. Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor \vec{AB} festgelegt.

Ermittle seine Komponenten: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$

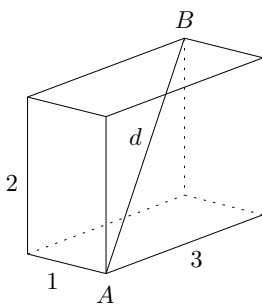
Für alle Punkte $A = (a_1 | a_2 | a_3)$ und $B = (b_1 | b_2 | b_3)$ gilt:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad \text{„Spitze minus Anfangspunkt“}$$



Die Punkte A und B spannen dabei einen **Quader** auf. Der Vektor \vec{AB} ist als Raumdiagonale dieses Quaders eingezeichnet. Die **Beträge** der 3 Komponenten von \vec{AB} sind die Seitenlängen dieses Quaders.

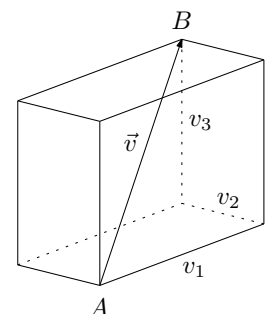
Berechne die Entfernung d der Eckpunkte A und B des dargestellten Quaders.



Für die **Länge** (den **Betrag**) des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Leite diese Formel her:

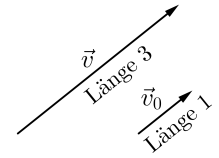



Einheitsvektor  $\sum \int \prod \sin$ **MmF**

Der Vektor $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ hat die gleiche **Richtung** und **Orientierung** wie \vec{v} .

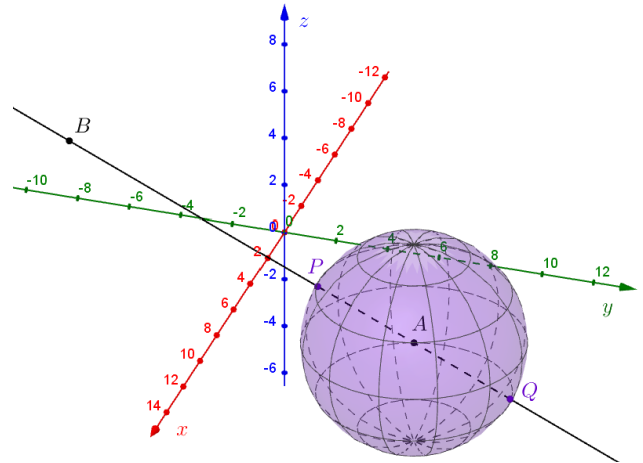
Für seine Länge gilt: $|\vec{v}_0| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen \vec{v}_0 den **Einheitsvektor von \vec{v}** .



Schnittpunkte: Gerade – Kugel  **MmF**

Die Punkte $A = (3 \mid 6 \mid -2)$ und $B = (1 \mid -8 \mid 3)$ liegen auf einer Gerade (Koordinaten in cm).
 Berechne jene beiden Punkte P und Q auf dieser Gerade, die 4,2 cm vom Punkt A entfernt sind.



Skalarprodukt  $\sum \int \prod \sin$ **MmF**

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir folgendermaßen:

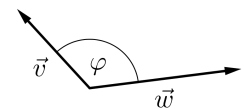
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Vektor-Winkel-Formel  $\sum \int \prod \sin$ **MmF**

Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.
 Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ können wir wie in der Ebene mit der **Vektor-Winkel-Formel** berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \quad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für den Winkel φ gilt also wie in der **Ebene** auch im Raum:

$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	$\begin{matrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{matrix}$	0
$\varphi = 90^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	$\begin{matrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{matrix}$	0
$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	$\begin{matrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{matrix}$	0

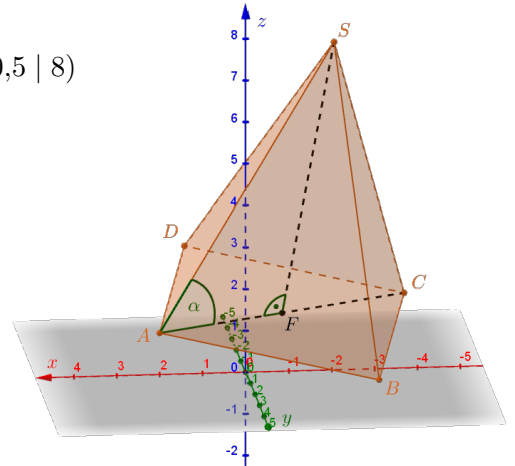
Rechts ist eine gerade **Pyramide** mit rechteckiger Grundfläche $ABCD$ und Spitze S dargestellt. Dabei gilt (Koordinaten in cm):

$$A = (2 \mid 0 \mid 1), B = (-3 \mid 1 \mid 0), C = (-4 \mid -3 \mid 1), S = (-2 \mid 0,5 \mid 8)$$

- 1) Berechne den Eckpunkt D .
- 2) Berechne den eingezeichneten Winkel $\alpha = \angle CAS$.

Der Fußpunkt F liegt in der Mitte der Grundfläche.

- 3) Berechne den Fußpunkt F .
- 4) Berechne das Volumen der Pyramide.



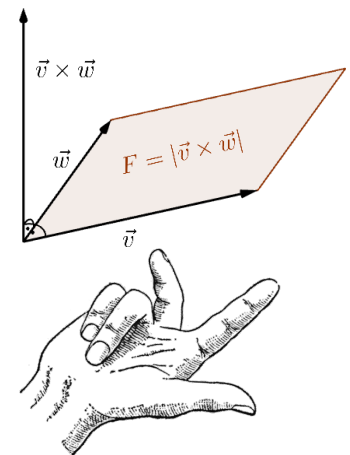
Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren \vec{v} und \vec{w} ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „ \vec{v} kreuz \vec{w} “
„Kreuzprodukt“

Das Vektorprodukt hat die folgenden drei Eigenschaften:

- 1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf \vec{v} und normal auf \vec{w} .
Damit ist die Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Orientierung.
- 2) Die Vektoren \vec{v} , \vec{w} und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.
Lege den Daumen deiner *rechten* Hand auf \vec{v} und den Zeigefinger auf \vec{w} .
Wenn du den Mittelfinger abiegst, dann kannst du ihn auf den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ legen.
Damit ist die Orientierung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Länge.
- 3) Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt F dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
Damit ist die Länge von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt.



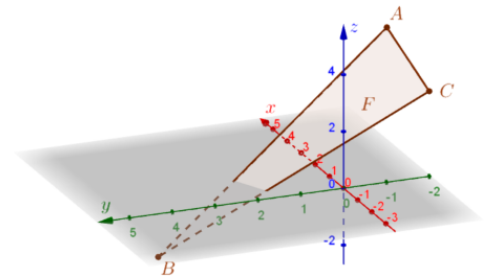
Das Vektorprodukt ist *nicht* kommutativ. Es gilt nämlich:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Lege umgekehrt den Daumen deiner rechten Hand auf \vec{w} und den Zeigefinger auf \vec{v} .

Berechne das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 Überprüfe, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ tatsächlich einen rechten Winkel mit den Vektoren \vec{v} und \vec{w} einschließt.

Das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid -2 \mid 4)$, $B = (1 \mid 4 \mid -2)$ und $C = (0 \mid -2 \mid 3)$ ist dargestellt.
 1) Berechne den Vektor $\vec{AB} \times \vec{AC}$. (Einheiten in cm)
 2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks.



- i) Bei $r \cdot \vec{v}$ wird ein Vektor \vec{v} mit einem Skalar $r \in \mathbb{R}$ multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.
- ii) Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Skalar**.
- iii) Beim Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

Gegeben sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} im Raum und ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.
 Ist das Ergebnis der Rechnung jeweils ein Skalar oder ein Vektor?

- a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ b) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot r$ e) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot r$