

Wie **Vektoren in der Ebene** definieren wir **Vektoren im Raum** analog als Zahlentripel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Mit Vektoren im Raum rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

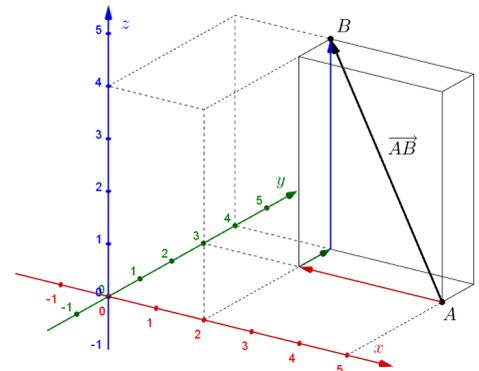
- **Addition von Vektoren:**  $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:**  $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:**  $-\vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:**  $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

Die Punkte  $A = (\square | \square | \square)$  und  $B = (\square | \square | \square)$  sind rechts im 3-dimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet. Durch den Pfeil von  $A$  nach  $B$  ist ein Vektor  $\vec{AB}$  festgelegt.

Ermittle seine Komponenten:  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$

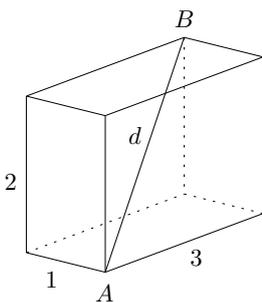
Für alle Punkte  $A = (a_1 | a_2 | a_3)$  und  $B = (b_1 | b_2 | b_3)$  gilt:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad \text{„Spitze minus Anfangspunkt“}$$



Die Punkte  $A$  und  $B$  spannen dabei einen **Quader** auf. Der Vektor  $\vec{AB}$  ist als Raumdiagonale dieses Quaders eingezeichnet. Die **Beträge** der 3 Komponenten von  $\vec{AB}$  sind die Seitenlängen dieses Quaders.

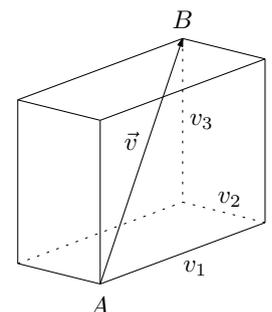
Berechne die Entfernung  $d$  der Eckpunkte  $A$  und  $B$  des dargestellten Quaders.



Für die **Länge** (den **Betrag**) des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Leite diese Formel her:

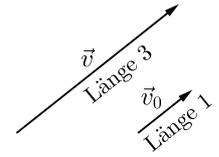


Einheitsvektor 

Der Vektor  $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$  hat die gleiche **Richtung** und **Orientierung** wie  $\vec{v}$ .

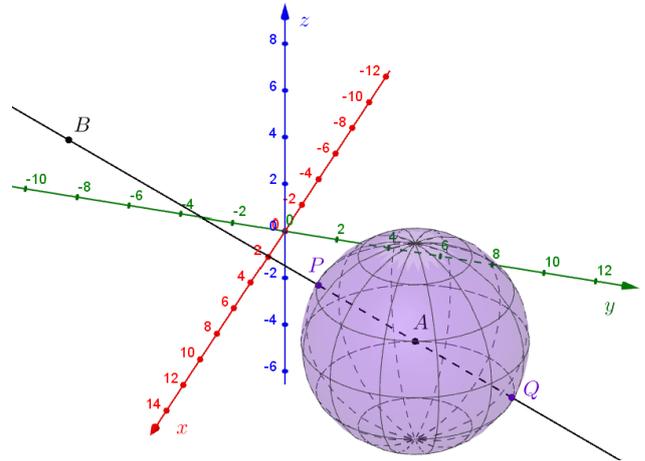
Für seine Länge gilt:  $|\vec{v}_0| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen  $\vec{v}_0$  den **Einheitsvektor von  $\vec{v}$** .



Schnittpunkte: Gerade – Kugel 

Die Punkte  $A = (3 | 6 | -2)$  und  $B = (1 | -8 | 3)$  liegen auf einer Gerade (Koordinaten in cm).  
Berechne jene beiden Punkte  $P$  und  $Q$  auf dieser Gerade, die 4,2 cm vom Punkt  $A$  entfernt sind.



Skalarprodukt 

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$  berechnen wir folgendermaßen:

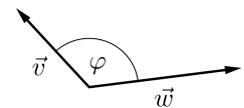
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Vektor-Winkel-Formel 

Die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.  
Den eingeschlossenen Winkel  $\varphi$  mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  können wir wie in der Ebene mit der **Vektor-Winkel-Formel** berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \quad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für den Winkel  $\varphi$  gilt also wie in der **Ebene** auch im Raum:

|                                     |        |                         |   |   |
|-------------------------------------|--------|-------------------------|---|---|
| $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$   | $\iff$ | $\vec{v} \cdot \vec{w}$ | $\begin{matrix} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{matrix}$ | 0 |
| $\varphi = 90^\circ$                | $\iff$ | $\vec{v} \cdot \vec{w}$ | $\begin{matrix} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{matrix}$ | 0 |
| $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ | $\iff$ | $\vec{v} \cdot \vec{w}$ | $\begin{matrix} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{matrix}$ | 0 |

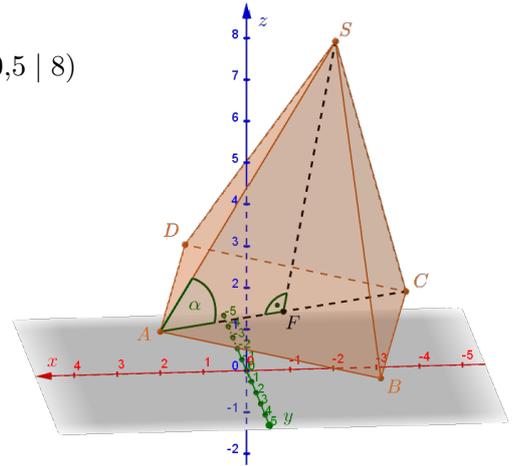
Rechts ist eine gerade **Pyramide** mit rechteckiger Grundfläche  $ABCD$  und Spitze  $S$  dargestellt. Dabei gilt (Koordinaten in cm):

$$A = (2 \mid 0 \mid 1), \quad B = (-3 \mid 1 \mid 0), \quad C = (-4 \mid -3 \mid 1), \quad S = (-2 \mid 0,5 \mid 8)$$

- 1) Berechne den Eckpunkt  $D$ .
- 2) Berechne den eingezeichneten Winkel  $\alpha = \angle CAS$ .

Der Fußpunkt  $F$  liegt in der Mitte der Grundfläche.

- 3) Berechne den Fußpunkt  $F$ .
- 4) Berechne das Volumen der Pyramide.



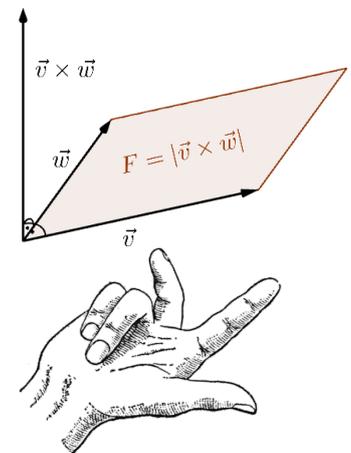
Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „ $\vec{v}$  kreuz  $\vec{w}$ “  
„Kreuzprodukt“

Das Vektorprodukt hat die folgenden drei Eigenschaften:

- 1) Der Vektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  steht normal auf  $\vec{v}$  und normal auf  $\vec{w}$ .  
Damit ist die Richtung von  $\vec{v} \times \vec{w}$  eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Orientierung.
- 2) Die Vektoren  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  und  $\vec{v} \times \vec{w}$  bilden ein Rechtssystem.  
Lege den Daumen deiner *rechten* Hand auf  $\vec{v}$  und den Zeigefinger auf  $\vec{w}$ .  
Wenn du den Mittelfinger abiegst, dann kannst du ihn auf den Vektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  legen.  
Damit ist die Orientierung von  $\vec{v} \times \vec{w}$  eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Länge.
- 3) Die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen ein Parallelogramm auf.  
Der Flächeninhalt  $F$  dieses Parallelogramms ist  $|\vec{v} \times \vec{w}|$ .  
Damit ist die Länge von  $\vec{v} \times \vec{w}$  eindeutig festgelegt.



Das Vektorprodukt ist *nicht* kommutativ. Es gilt nämlich:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

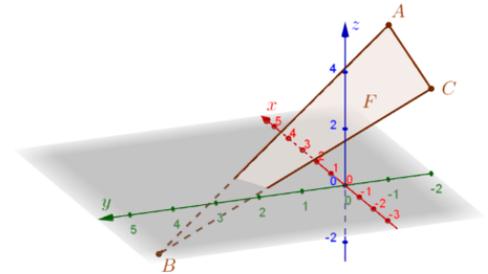
Lege umgekehrt den Daumen deiner rechten Hand auf  $\vec{w}$  und den Zeigefinger auf  $\vec{v}$ .

Berechne das Vektorprodukt  $\vec{v} \times \vec{w}$  der Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Überprüfe, dass  $\vec{v} \times \vec{w}$  tatsächlich einen rechten Winkel mit den Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  einschließt.

Das Dreieck mit den Eckpunkten  $A = (3 \mid -2 \mid 4)$ ,  $B = (1 \mid 4 \mid -2)$  und  $C = (0 \mid -2 \mid 3)$  ist dargestellt.

- 1) Berechne den Vektor  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ . (Einheiten in cm)
- 2) Berechne den Flächeninhalt  $F$  des Dreiecks.



- i) Bei  $r \cdot \vec{v}$  wird ein Vektor  $\vec{v}$  mit einem Skalar  $r \in \mathbb{R}$  multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.
- ii) Beim Skalarprodukt  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Skalar**.
- iii) Beim Vektorprodukt  $\vec{v} \times \vec{w}$  werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  im Raum und ein Skalar  $r \in \mathbb{R}$ .

Ist das Ergebnis der Rechnung jeweils ein Skalar oder ein Vektor?

- a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$     b)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$     c)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$     d)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot r$     e)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot r$

