Vektoren im Raum

Wie Vektoren in der Ebene definieren wir **Vektoren im Raum** analog als Zahlentripel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Vektorrechnen

Mit Vektoren im Raum rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

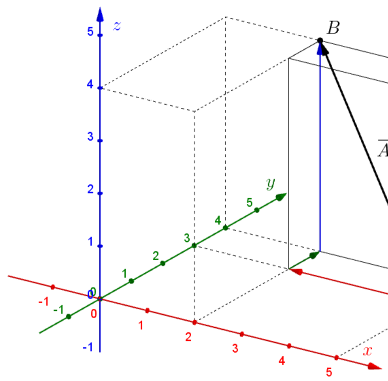
- **Addition von Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot v_1 \\ r\cdot v_2 \\ r\cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

Spitze minus Anfangspunkt

Die Punkte $A = (\square \mid \square \mid \square)$ und $B = (\square \mid \square \mid \square)$ sind rechts im 3-dimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet.

Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ festgelegt.

Ermittle seine Komponenten: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$



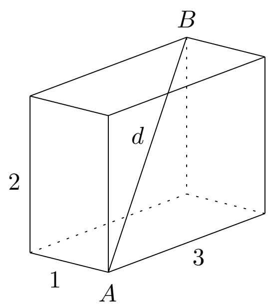
Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$$

„Spitze minus Anfangspunkt“

Die Punkte A und B spannen dabei einen Quader auf.
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist als Raumdiagonale dieses Quaders eingezeichnet.
Die Beträge der 3 Komponenten von $\overrightarrow{AB}$ sind die Seitenlängen dieses Quaders.

Raumdiagonale eines Quaders



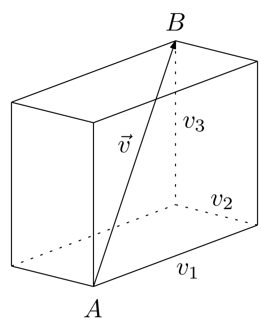
Berechne die Entfernung d der Eckpunkte A und B des dargestellten Quaders.

Betrag eines Vektors

Für die **Länge** (den **Betrag**) des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Leite diese Formel her:

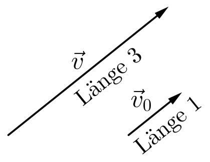


Einheitsvektor

Der Vektor $\boldsymbol{\vec{v_0}} = \dfrac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{\vec{v}}|} \cdot \boldsymbol{\vec{v}}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v}$.

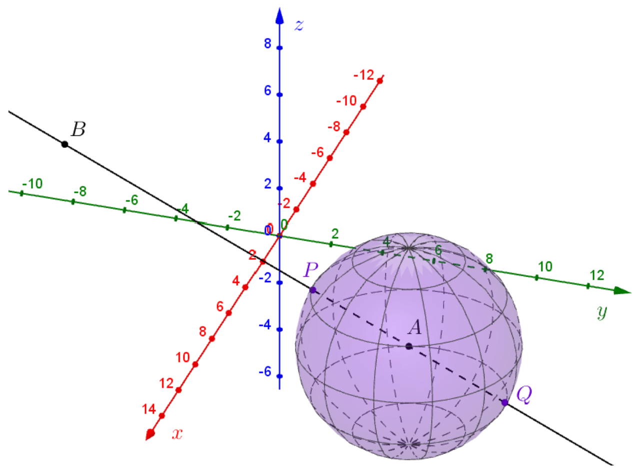
Für seine Länge gilt: $|\vec{v_0}| = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen $\boldsymbol{\vec{v_0}}$ den **Einheitsvektor von** $\boldsymbol{\vec{v}}$.



Schnittpunkte: Gerade – Kugel

Die Punkte $A = (3 \mid 6 \mid -2)$ und $B = (1 \mid -8 \mid 3)$ liegen auf einer Gerade (Koordinaten in cm). Berechne jene beiden Punkte P und Q auf dieser Gerade, die 4,2 cm vom Punkt A entfernt sind.



Skalarprodukt

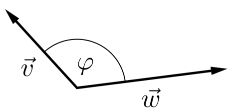
Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3}$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet. Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ können wir wie in der Ebene mit der **Vektor-Winkel-Formel** berechnen:



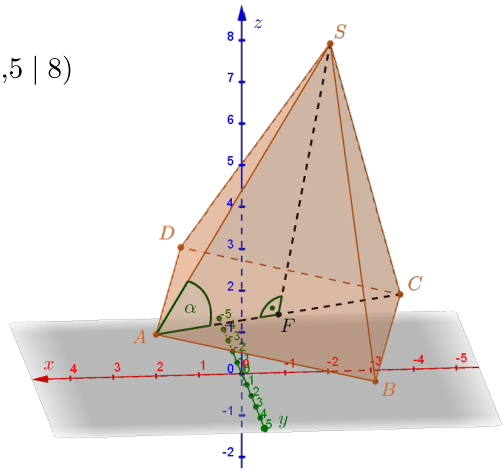
$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}} \qquad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Winkel φ gilt also wie in der Ebene auch im Raum: $\begin{cases} 0° \leq \varphi < 90° & \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} \;\boxed{}\; 0 \\ \varphi = 90° & \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} \;\boxed{}\; 0 \\ 90° < \varphi \leq 180° & \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} \;\boxed{}\; 0 \end{cases}$

Pyramide

Rechts ist eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $ABCD$ und Spitze S dargestellt.
Dabei gilt (Koordinaten in cm):

$A = (2 \mid 0 \mid 1),\ B = (-3 \mid 1 \mid 0),\ C = (-4 \mid -3 \mid 1),\ S = (-2 \mid 0{,}5 \mid 8)$



1) Berechne den Eckpunkt D.

2) Berechne den eingezeichneten Winkel $\alpha = \angle CAS$.

Der Fußpunkt F liegt in der Mitte der Grundfläche.

3) Berechne den Fußpunkt F.

4) Berechen das Volumen der Pyramide.

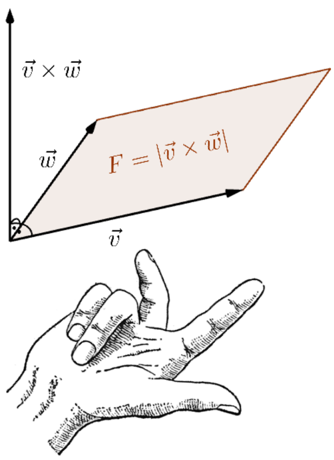
Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „$\vec{v}$ kreuz $\vec{w}$“
„Kreuzprodukt“

Das Vektorprodukt hat die folgenden drei Eigenschaften:



1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf $\vec{v}$ und normal auf $\vec{w}$.
Damit ist die Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Orientierung.

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.
Lege den Daumen deiner *rechten* Hand auf $\vec{v}$ und den Zeigefinger auf $\vec{w}$.
Wenn du den Mittelfinger abbiegst, dann kannst du ihn auf den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ legen.
Damit ist die Orientierung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Länge.

3) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt F dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
Damit ist die Länge von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt.

Das Vektorprodukt ist *nicht* kommutativ. Es gilt nämlich:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Lege umgekehrt den Daumen deiner rechten Hand auf $\vec{w}$ und den Zeigefinger auf $\vec{v}$.

Vektorprodukt

Berechne das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Überprüfe, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ tatsächlich einen rechten Winkel mit den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einschließt.

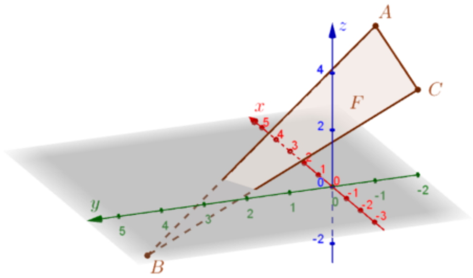
Dreieck

Das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid -2 \mid 4)$, $B = (1 \mid 4 \mid -2)$ und $C = (0 \mid -2 \mid 3)$ ist dargestellt.

(Einheiten in cm)

1) Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks.



Drei verschiedene Multiplikationen

i) Bei $\boldsymbol{r \cdot \vec{v}}$ wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar $r \in \mathbb{R}$ multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

ii) Beim Skalarprodukt $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w}}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Skalar**.

iii) Beim Vektorprodukt $\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{w}}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

Skalar oder Vektor?

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ im Raum und ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.

Ist das Ergebnis der Rechnung jeweils ein Skalar oder ein Vektor?

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ **b)** $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ **c)** $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ **d)** $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot r$ **e)** $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot r$