Vektor

Jedes Zahlenpaar $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{pmatrix}$ heißt **Vektor**. Die Zahlen a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** des Vektors.

Bei Vektoren schreiben wir die Komponenten untereinander. Bei Punkten $A = (a_1 \mid a_2)$ schreiben wir die Koordinaten nebeneinander.

Vektor als Pfeil veranschaulichen

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist rechts durch 3 verschiedene Pfeile dargestellt.

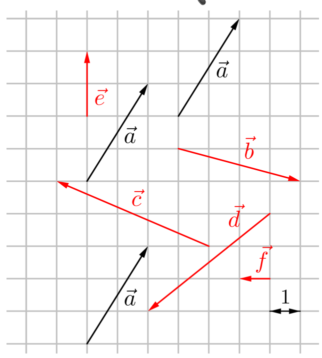
Allgemein können wir jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ als Verschiebung deuten:

$a_1 \ldots$ Verschiebung in horizontaler Richtung
$a_2 \ldots$ Verschiebung in vertikaler Richtung

Der Anfangspunkt des jeweiligen Pfeils wird zu seiner Spitze verschoben.

Zeichne die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ **3)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **4)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Addition von Vektoren

Die **Summe** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ berechnen wir komponentenweise:

$$\boldsymbol{\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}}$$

Addition von Vektoren

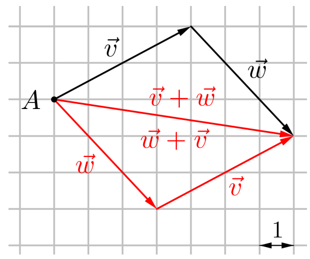
Zwei nacheinander ausgeführte Verschiebungen können wir durch eine einzige Verschiebung ersetzen.
Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Vektoren $\vec{v} + \vec{w}$ und $\vec{w} + \vec{v}$:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts grafisch dargestellt.
Dabei ist die Spitze von $\vec{v}$ der Anfangspunkt von $\vec{w}$.
Zeichne den Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ ausgehend vom Punkt A ein.

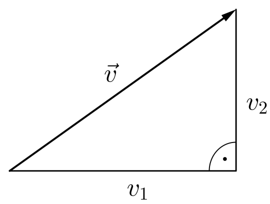
c) Veranschauliche genauso die Addition $\vec{w} + \vec{v}$ ausgehend vom Punkt A.



Länge (Betrag) eines Vektors

Für die **Länge** (den **Betrag**) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreiben wir $|\boldsymbol{\vec{v}}|$.
Rechts ist ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dargestellt.
Stelle mithilfe von v_1 und v_2 eine Formel für $|\vec{v}|$ auf.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Multiplikation mit einem Skalar

Wir können jede reelle **Zahl** r mit jedem **Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ komponentenweise **multiplizieren**:

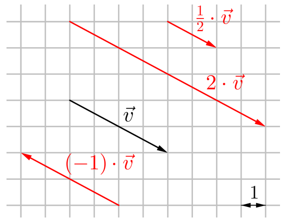
$$\boldsymbol{r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}}$$

In der Vektorrechnung wird für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ auch der Begriff **Skalar** verwendet.

Multiplikation mit einem Skalar

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist rechts dargestellt.
Berechne die folgenden Vektoren, und stelle sie rechts als Pfeile dar:

1) $2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ **2)** $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **3)** $(-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$



Was fällt dir an den Pfeilen auf?

Richtung / Orientierung

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben dieselbe **Richtung**, wenn $\boldsymbol{\vec{w} = r \cdot \vec{v}}$ mit einer Zahl $r \neq 0$ gilt.

Wir schreiben dann $\boldsymbol{\vec{v} \parallel \vec{w}}$ und sagen: „Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **parallel**.“ $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ist dabei $\boldsymbol{r > 0}$, dann haben die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die **gleiche Orientierung**.

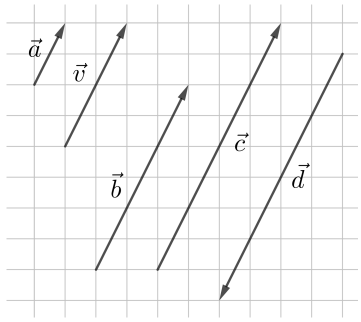
Ist dabei $\boldsymbol{r < 0}$, dann haben die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die **entgegengesetzte Orientierung**.

Richtung / Orientierung

Die rechts dargestellten Vektoren haben alle die gleiche Richtung. $\vec{d}$ ist aber *nicht* gleich orientiert wie $\vec{v}$.

a) Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

$\vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ $\quad \vec{b} = \frac{3}{2} \cdot \vec{v}$ $\quad \vec{c} = 2 \cdot \vec{v}$ $\quad \vec{d} = -2 \cdot \vec{v}$



b) Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Berechne w_1 so, dass $\vec{v} \parallel \vec{w}$ gilt.

$$\vec{w} = r \cdot \vec{v} \implies 7 = 4 \cdot r \implies r = \frac{7}{4} \implies w_1 = 2 \cdot r = \frac{7}{2}$$

Allgemein ist die Länge von $r \cdot \vec{v}$ das $|r|$-fache der Länge von $\vec{v}$.

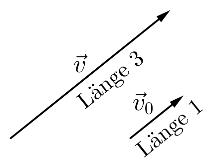
Begründung: $|r \cdot \vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(r \cdot v_1)^2 + (r \cdot v_2)^2} = \sqrt{r^2 \cdot v_1^2 + r^2 \cdot v_2^2} = \sqrt{r^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |r| \cdot |\vec{v}|$

Einheitsvektor

Der Vektor $\boldsymbol{\vec{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v}$.

Für seine Länge gilt: $|\vec{v_0}| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

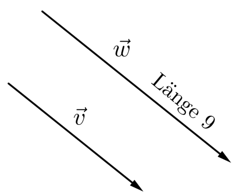
Wir nennen $\boldsymbol{\vec{v_0}}$ den **Einheitsvektor von** $\boldsymbol{\vec{v}}$.



Einheitsvektor / Skalierung

1) Berechne den Einheitsvektor $\vec{v_0}$ von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2) Der Vektor $\vec{w}$ hat die Länge 9 sowie die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v}$. Berechne $\vec{w}$.



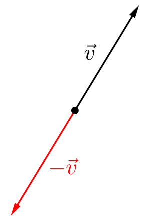
1) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \implies \vec{v_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$

2) $\vec{w} = 9 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -5{,}4 \end{pmatrix}$

Vektor und Gegenvektor

Jeder Vektor $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ hat seinen **Gegenvektor** $\boldsymbol{-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v} = \binom{-v_1}{-v_2}}$.

Zeichne rechts den Gegenvektor von $\vec{v}$ mit dem gleichen Anfangspunkt ein.



Die Summe von Vektor und Gegenvektor ist der **Nullvektor**:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \binom{v_1}{v_2} + \binom{-v_1}{-v_2} = \binom{v_1 - v_1}{v_2 - v_2} = \binom{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

Der Nullvektor hat die Länge 0 und kann als Punkt dargestellt werden.

Subtraktion von Vektoren

Die **Differenz** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ berechnen wir komponentenweise:

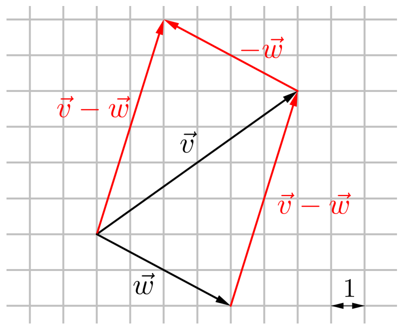
$$\boldsymbol{\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \binom{v_1 - w_1}{v_2 - w_2}}$$

Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \binom{6}{4}$ und $\vec{w} = \binom{4}{-2}$.

a) Berechne die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$:

$$\vec{v} - \vec{w} = \binom{6-4}{4-(-2)} = \binom{2}{6}$$



b) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts grafisch dargestellt.

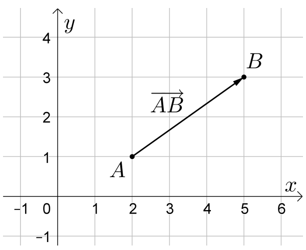
Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Denkansätze:

i) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$ **ii)** $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$

Verwende diese Denkansätze, um $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten oben rechts einzuzeichnen.

Spitze minus Anfangspunkt

Im Koordinatensystem unten sind zwei Punkte A und B eingezeichnet.
Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor festgelegt. Wir schreiben für diesen Vektor $\overrightarrow{AB}$.



1) Trage die Koordinaten der Punkte in die Kästchen ein:

$A = (2 \mid 1)$ $B = (5 \mid 3)$

2) Trage die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in die Kästchen ein:

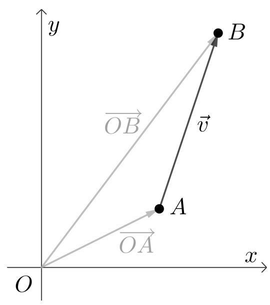
$\overrightarrow{AB} = \binom{3}{2}$

Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2)$ und $B = (b_1 \mid b_2)$ gilt: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}}$ „Spitze minus Anfangspunkt“

Punkt + Vektor = Punkt

Wir verschieben den Punkt $A = (2 \mid 1)$ entlang des Vektors $\vec{v} = \binom{1}{3}$.
Dann landet er im Punkt $B = (3 \mid 4)$.
Formal addieren wir dabei den sogenannten **Ortsvektor** $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}}$ und den Vektor $\vec{v}$.
Das Ergebnis ist der Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OA} + \vec{v} = \binom{2}{1} + \binom{1}{3} = \binom{3}{4} = \overrightarrow{OB}$$



In Zukunft schreiben wir dafür auch kürzer: $A + \vec{v} = B$

Verschiebung

Das rechts dargestellte Dreieck ABC mit den Eckpunkten

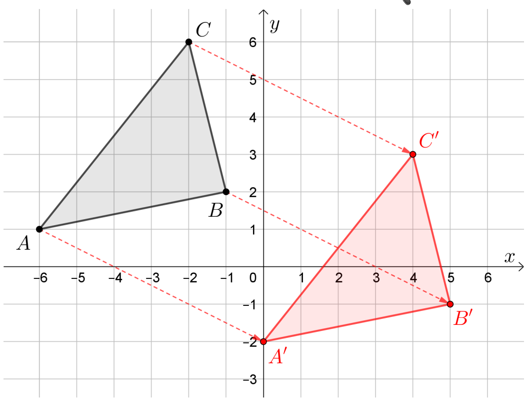
$$A = (-6 \mid 1),\ B = (-1 \mid 2) \ \text{ und } \ C = (-2 \mid 6)$$

wird entlang eines Vektors $\vec{v}$ verschoben. Dabei wird der Eckpunkt A zum Punkt $A' = (0 \mid -2)$ verschoben.

1) Berechne $\vec{v}$.

2) Berechne die Eckpunkte B' und C' vom verschobenen Dreieck $A'B'C'$.

3) Zeichne das Dreieck $A'B'C'$ rechts oben ein.



$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0-(-6) \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

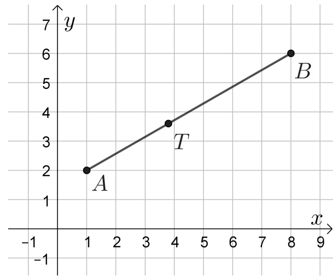
$B' = B + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = (5 \mid -1)$ $\quad C' = C + \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = (4 \mid 3)$

Streckenteilung

Die Strecke AB hat die Endpunkte $A = (1 \mid 2)$ und $B = (8 \mid 6)$.
Der eingezeichnete Punkt T teilt die Strecke AB im Verhältnis 2 : 3.

1) Ermittle den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und den Vektor $\overrightarrow{AT}$.

2) Berechne den Punkt T.



1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AT} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$

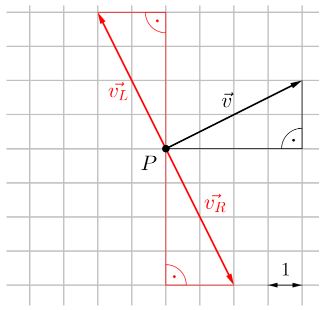
2) $T = A + \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 3{,}8 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$

Normalvektoren

Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.
Zeichne ihn rechts ein und ermittle seine Komponenten: $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ um 90° im Uhrzeigersinn.
Zeichne ihn rechts ein und ermittle seine Komponenten: $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Allgemein sind die Vektoren $\boldsymbol{\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}}$ und $\boldsymbol{\vec{v}_R = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}}$ jene beiden **Normalvektoren von** $\boldsymbol{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$, die gleich lang wie $\vec{v}$ sind.

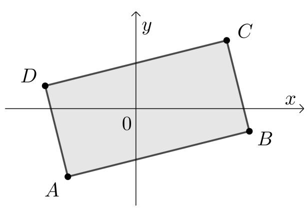


Rechteck

Das Rechteck $ABCD$ hat die Eckpunkte $A = (-3 \mid -3)$ und $B = (5 \mid -1)$.
Die Seite AD ist halb so lang wie die Seite AB.

1) Berechne die Eckpunkte C und D.

2) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.



1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-(-3) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$D = A + \overrightarrow{AD} = (-4 \mid 1)$ $\quad C = B + \overrightarrow{AD} = (4 \mid 3)$

2) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$ $\quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

Flächeninhalt $F = \sqrt{68} \cdot \sqrt{17} = 34$