

Jedes Zahlenpaar $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ heißt **Vektor**. Die Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** des Vektors.
Bei Vektoren schreiben wir die Komponenten untereinander. Bei Punkten $A = (a_1 | a_2)$ schreiben wir die Koordinaten nebeneinander.

Vektor als Pfeil veranschaulichen  **MmF**

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist rechts durch 3 verschiedene Pfeile dargestellt.

Allgemein können wir jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ als Verschiebung deuten:

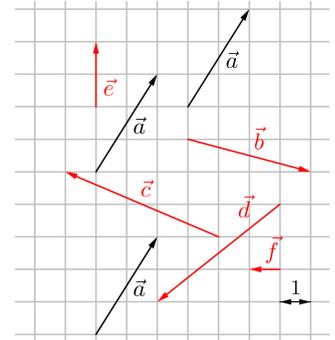
$a_1 \dots$ Verschiebung in horizontaler Richtung

$a_2 \dots$ Verschiebung in vertikaler Richtung

Der Anfangspunkt des jeweiligen Pfeils wird zu seiner Spitze verschoben.

Zeichne die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

- 1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 4) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Addition von Vektoren  **MmF**

Die **Summe** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ berechnen wir komponentenweise:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren  **MmF**

Zwei nacheinander ausgeführte Verschiebungen können wir durch eine einzige Verschiebung ersetzen.

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

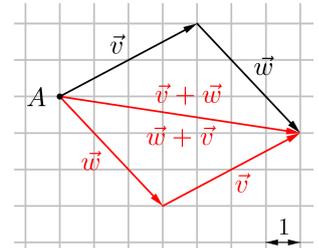
- a) Berechne die Vektoren $\vec{v} + \vec{w}$ und $\vec{w} + \vec{v}$:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- b) Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} sind rechts grafisch dargestellt.
Dabei ist die Spitze von \vec{v} der Anfangspunkt von \vec{w} .

Zeichne den Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ ausgehend vom Punkt A ein.

- c) Veranschauliche genauso die Addition $\vec{w} + \vec{v}$ ausgehend vom Punkt A.



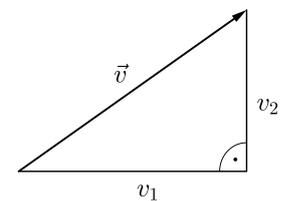
Länge (Betrag) eines Vektors  **MmF**

Für die **Länge** (den **Betrag**) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreiben wir $|\vec{v}|$.

Rechts ist ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Stelle mithilfe von v_1 und v_2 eine Formel für $|\vec{v}|$ auf.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Multiplikation mit einem Skalar  **MmF**

Wir können jede reelle **Zahl** r mit jedem **Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ komponentenweise **multiplizieren**:

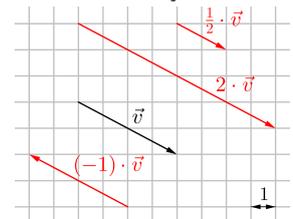
$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix} \quad \text{In der Vektorrechnung wird für eine Zahl } r \in \mathbb{R} \text{ auch der Begriff } \textbf{Skalar} \text{ verwendet.}$$

Multiplikation mit einem Skalar 

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist rechts dargestellt.
 Berechne die folgenden Vektoren, und stelle sie rechts als Pfeile dar:

- 1) $2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $(-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Was fällt dir an den Pfeilen auf?



Richtung / Orientierung 

Zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} haben dieselbe **Richtung**, wenn $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $r \neq 0$ gilt.

Wir schreiben dann $\vec{v} \parallel \vec{w}$ und sagen: „Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} sind **parallel**.“ $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ist dabei $r > 0$, dann haben die Vektoren \vec{v} und \vec{w} die **gleiche Orientierung**.

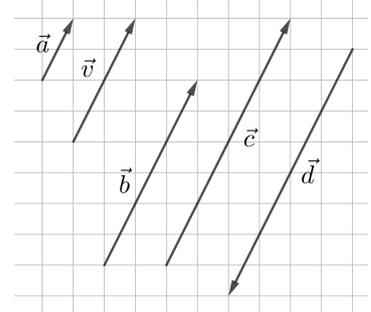
Ist dabei $r < 0$, dann haben die Vektoren \vec{v} und \vec{w} die **entgegengesetzte Orientierung**.

Richtung / Orientierung 

Die rechts dargestellten Vektoren haben alle die gleiche Richtung. \vec{d} ist aber *nicht* gleich orientiert wie \vec{v} .

a) Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \quad \vec{b} = \frac{3}{2} \cdot \vec{v} \quad \vec{c} = 2 \cdot \vec{v} \quad \vec{d} = -2 \cdot \vec{v}$$



b) Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Berechne w_1 so, dass $\vec{v} \parallel \vec{w}$ gilt.

$$\vec{w} = r \cdot \vec{v} \implies 7 = 4 \cdot r \implies r = \frac{7}{4} \implies w_1 = 2 \cdot r = \frac{7}{2}$$

Allgemein ist die Länge von $r \cdot \vec{v}$ das $|r|$ -fache der Länge von \vec{v} .

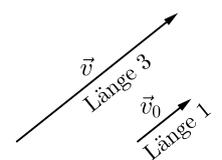
Begründung: $|r \cdot \vec{v}| = |(r \cdot v_1, r \cdot v_2)| = \sqrt{(r \cdot v_1)^2 + (r \cdot v_2)^2} = \sqrt{r^2 \cdot v_1^2 + r^2 \cdot v_2^2} = \sqrt{r^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |r| \cdot |\vec{v}|$

Einheitsvektor 

Der Vektor $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie \vec{v} .

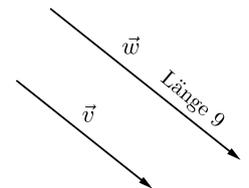
Für seine Länge gilt: $|\vec{v}_0| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen \vec{v}_0 den **Einheitsvektor von \vec{v}** .



Einheitsvektor / Skalierung 

- Berechne den Einheitsvektor \vec{v}_0 von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- Der Vektor \vec{w} hat die Länge 9 sowie die gleiche Richtung und Orientierung wie \vec{v} . Berechne \vec{w} .



1) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \implies \vec{v}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,6 \end{pmatrix}$

2) $\vec{w} = 9 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 7,2 \\ -5,4 \end{pmatrix}$

Vektor und Gegenvektor 

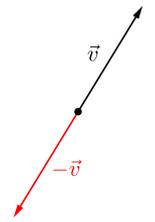
Jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ hat seinen **Gegenvektor** $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$.

Zeichne rechts den Gegenvektor von \vec{v} mit dem gleichen Anfangspunkt ein.

Die Summe von Vektor und Gegenvektor ist der **Nullvektor**:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_1 \\ v_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor hat die Länge 0 und kann als Punkt dargestellt werden.



Subtraktion von Vektoren 

Die **Differenz** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ berechnen wir komponentenweise:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren 

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$:

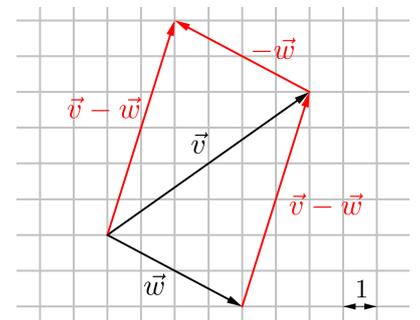
$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

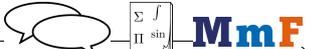
b) Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} sind rechts grafisch dargestellt.

Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Denkansätze:

- i) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$
- ii) $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$

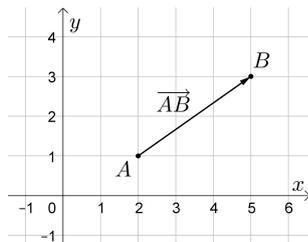
Verwende diese Denkansätze, um $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten oben rechts einzuzeichnen.



Spitze minus Anfangspunkt 

Im Koordinatensystem unten sind zwei Punkte A und B eingezeichnet.

Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor festgelegt. Wir schreiben für diesen Vektor \vec{AB} .



1) Trage die Koordinaten der Punkte in die Kästchen ein:

$$A = (2 \mid 1) \quad B = (5 \mid 3)$$

2) Trage die Komponenten des Vektors \vec{AB} in die Kästchen ein:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2)$ und $B = (b_1 \mid b_2)$ gilt: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

„Spitze minus Anfangspunkt“

Punkt + Vektor = Punkt 

Wir verschieben den Punkt $A = (2 \mid 1)$ entlang des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

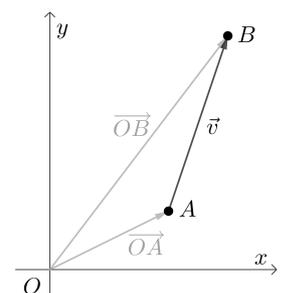
Dann landet er im Punkt $B = (3 \mid 4)$.

Formal addieren wir dabei den sogenannten **Ortsvektor** \vec{OA} und den Vektor \vec{v} .

Das Ergebnis ist der Ortsvektor \vec{OB} :

$$\vec{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{OB}$$

In Zukunft schreiben wir dafür auch kürzer: $A + \vec{v} = B$

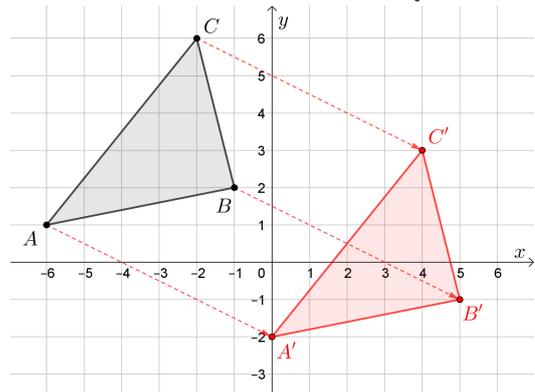


Verschiebung 

Das rechts dargestellte Dreieck ABC mit den Eckpunkten

$$A = (-6 \mid 1), B = (-1 \mid 2) \text{ und } C = (-2 \mid 6)$$

wird entlang eines Vektors \vec{v} verschoben. Dabei wird der Eckpunkt A zum Punkt $A' = (0 \mid -2)$ verschoben.



- 1) Berechne \vec{v} .
- 2) Berechne die Eckpunkte B' und C' vom verschobenen Dreieck $A'B'C'$.
- 3) Zeichne das Dreieck $A'B'C'$ rechts oben ein.

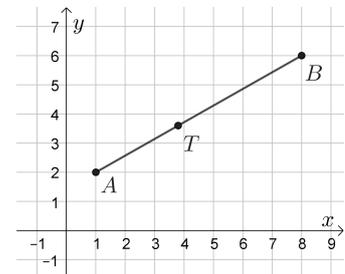
$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0 - (-6) \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B' = B + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C' = C + \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Streckenteilung 

Die Strecke AB hat die Endpunkte $A = (1 \mid 2)$ und $B = (8 \mid 6)$.

Der eingezeichnete Punkt T teilt die Strecke AB im Verhältnis $2 : 3$.



- 1) Ermittle den Vektor \overrightarrow{AB} und den Vektor \overrightarrow{AT} .
- 2) Berechne den Punkt T .

$$1) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AT} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$2) T = A + \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 3,8 \\ 3,6 \end{pmatrix}$$

Normalvektoren 

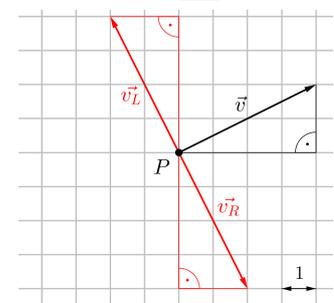
Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Zeichne ihn rechts ein und ermittle seine Komponenten: $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ um 90° im Uhrzeigersinn.

Zeichne ihn rechts ein und ermittle seine Komponenten: $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

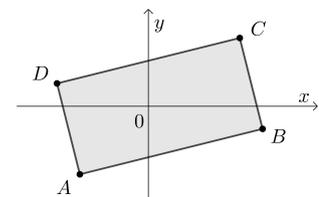
Allgemein sind die Vektoren $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ jene beiden **Normalvektoren** von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, die gleich lang wie \vec{v} sind.



Rechteck 

Das Rechteck $ABCD$ hat die Eckpunkte $A = (-3 \mid -3)$ und $B = (5 \mid -1)$.

Die Seite AD ist halb so lang wie die Seite AB .



- 1) Berechne die Eckpunkte C und D .
- 2) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.

$$1) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - (-3) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = (-4 \mid 1) \quad C = B + \overrightarrow{AD} = (4 \mid 3)$$

$$2) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{Flächeninhalt } F = \sqrt{68} \cdot \sqrt{17} = 34$$

