Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Skalarprodukt und Winkel

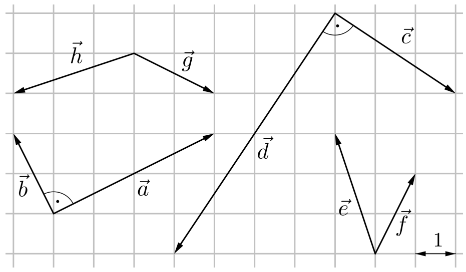
Rechts unten sind 4 Paare von Vektoren dargestellt.
Ermittle jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} =$

3) $\vec{e} \cdot \vec{f} =$

4) $\vec{g} \cdot \vec{h} =$



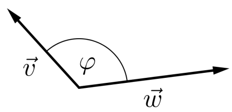
Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Vermutung?

Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.

Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ können wir mit der

Vektor-Winkel-Formel berechnen: $\boldsymbol{\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}}$ mit $\vec{v}, \vec{w} \neq \binom{0}{0}$



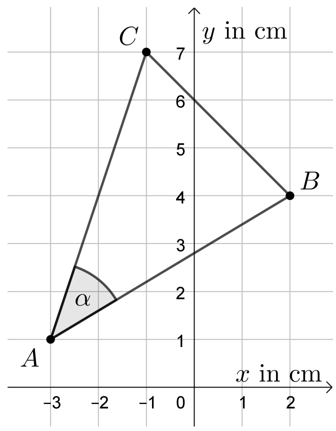
Die Vektor-Winkel-Formel kann man aus dem Cosinussatz herleiten. Mehr dazu findest du auf der letzten Seite.

Vektor-Winkel-Formel

Das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A = (-3 \mid 1)$, $B = (2 \mid 4)$ und $C = (-1 \mid 7)$ ist dargestellt.

1) Berechne den Winkel α mit der Vektor-Winkel-Formel.

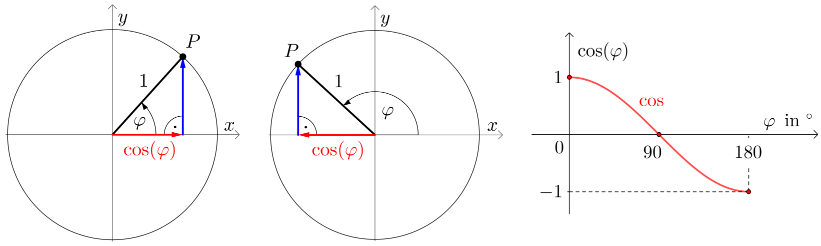
2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks mit der trigonometrischen Flächenformel.



Vorzeichen des Skalarprodukts

Die Winkelfunktion Cosinus ist am Einheitskreis für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert.
Wir untersuchen das Vorzeichen von $\cos(\varphi)$ für alle Winkel φ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.
Trage $<$, $>$ oder $=$ richtig in die Kästchen ein:

$\varphi = 0^\circ$	$\cos(\varphi)$ ☐ 1
$0^\circ < \varphi < 90^\circ$	$\cos(\varphi)$ ☐ 0
$\varphi = 90^\circ$	$\cos(\varphi)$ ☐ 0
$90^\circ < \varphi < 180^\circ$	$\cos(\varphi)$ ☐ 0
$\varphi = 180^\circ$	$\cos(\varphi)$ ☐ -1



Das Vorzeichen von $\cos(\varphi)$ verrät uns also, ob φ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist.

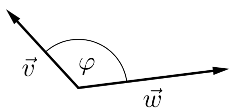
Aus $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$ und $|\vec{v}|, |\vec{w}| > 0$ folgt, dass $\cos(\varphi)$ und $\vec{v} \cdot \vec{w}$ das gleiche Vorzeichen haben.

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ schließen also genau dann einen …

… **rechten Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ☐ $\mathbf{0}$ gilt.

… **spitzen Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ☐ $\mathbf{0}$ gilt.

… **stumpfen Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ☐ $\mathbf{0}$ gilt.



Vorzeichen des Skalarprodukts

Die Richtung der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix}$ hängt von $x \in \mathbb{R}$ ab.

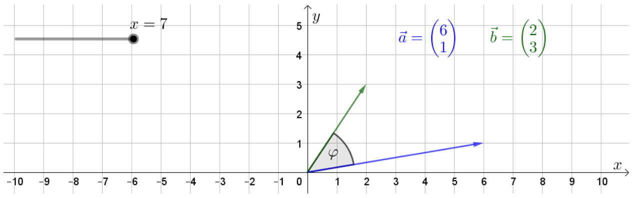
Berechne alle Werte von x so, dass …

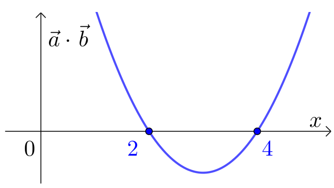
1) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.

2) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen rechten Winkel einschließen.

3) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen spitzen Winkel einschließen.

4) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen stumpfen Winkel einschließen.





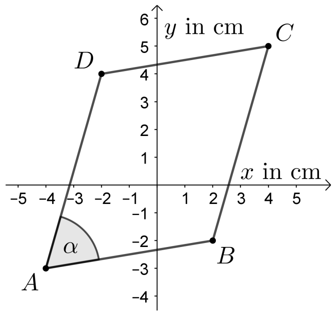
Parallelogramm

Das dargestellte Parallelogramm hat die Eckpunkte $A = (-4 \mid -3)$, $B = (2 \mid -2)$, C und $D = (-2 \mid 4)$.

1) Berechne den Eckpunkt C.

2) Berechne den eingezeichneten Winkel α.

3) Berechne den Flächeninhalt F des Parallelogramms mit der trigonometrischen Flächenformel.

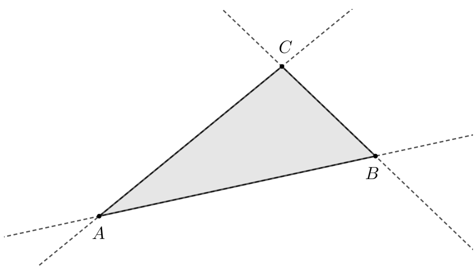


Gleicher Anfangspunkt

Zeichne rechts jeweils einen Winkel α, β, γ bzw. δ ein, der mit der angegebenen Formel berechnet wird.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|}\right)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right) \qquad \delta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right)$$

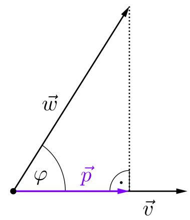


Hinweis: Finde jeweils einen geeigneten Anfangspunkt für die beiden Vektoren.

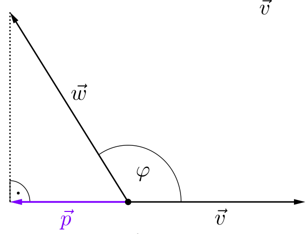
Normalprojektion

Neben dem Vorzeichen hat auch der Betrag des Skalarprodukts $\vec{v} \cdot \vec{w}$ eine geometrische Bedeutung.
Aus der Vektor-Winkel-Formel folgt: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)}$

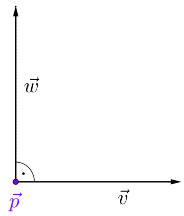
i) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen spitzen Winkel φ ein.
Der eingezeichnete Vektor $\vec{p}$ ist die sogenannte Normalprojektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$.
Im rechtwinkeligen Dreieck gilt: $|\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{p}|$
In diesem Fall gilt also: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{p}|}$



ii) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen stumpfen Winkel φ ein.
Im rechtwinkeligen Dreieck gilt: $|\vec{w}| \cdot \cos(180° - \varphi) = |\vec{p}|$
Aus dem Einheitskreis folgt, dass $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$ gilt.
In diesem Fall gilt also: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{p}|}$

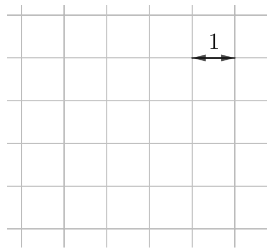


iii) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen rechten Winkel ein.
In diesem Fall gilt: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$
Die Normalprojektion $\vec{p}$ ist in diesem Fall der Nullvektor mit der Länge 0.



Normalprojektion

Wir überprüfen $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{p}|$ für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Stelle dazu die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ rechts mit gleichem Anfangspunkt dar.
Trage dann die richtigen Zahlen in die Kästchen ein:



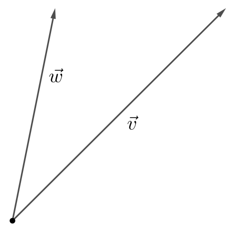
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \boxed{}$

$|\vec{v}| = \boxed{}$ $\quad |\vec{p}| = \boxed{}$ $\quad \Longrightarrow \quad |\vec{v}| \cdot |\vec{p}| = \boxed{}$ ✓

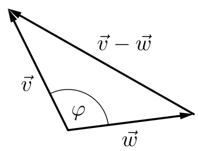
Geometrische Interpretation von $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Wie kannst du den Vektor $\vec{w}$ rechts unten ändern, *ohne* dass sich das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ verändert?
Zeichne rechts drei verschiedene Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein, für die gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{c}$$



Herleitung der Vektor-Winkel-Formel



Rechts sind die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.
Aus $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$ folgt, dass der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ die Spitze von $\vec{w}$ mit der Spitze von $\vec{v}$ verbindet.

Zur Herleitung der Vektor-Winkel-Formel berechnen wir $|\vec{v} - \vec{w}|^2$ auf zwei verschiedene Arten:

1) Berechnung mit der Formel für die Länge eines Vektors:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 = \left|\begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}\right|^2 &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = \\ &= v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot w_1 + w_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot w_2 + w_2^2 = \\ &= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot (\underbrace{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}_{=\vec{v} \cdot \vec{w}}) \end{aligned}$$

2) Berechnung mit dem Cosinussatz:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir die behauptete Vektor-Winkel-Formel:

$$\Longrightarrow \quad |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Arbeit

Wirkt auf einen Körper bei der Bewegung entlang eines Vektors $\vec{s}$ eine konstante Kraft $\vec{F}$, dann ist das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

die dabei verrichtete **Arbeit** $\boldsymbol{W}$. Mehr dazu am Arbeitsblatt – Kraftvektoren.