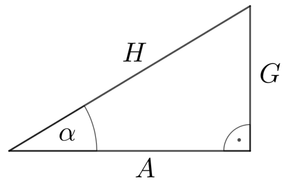
Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Gegeben ist ein spitzer Winkel α. Es gilt also: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Rechts unten ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem Winkel α dargestellt.

Erinnere dich an die Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck.



Trage die Seitenlängen A, G und H richtig in die Kästchen ein:

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H} \qquad \cos(\alpha) = \frac{A}{H} \qquad \tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Leite damit die folgenden Formeln für alle spitzen Winkel α her:

i) $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

$$\frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{G \cdot H}{A \cdot H} = \frac{G}{A}$$

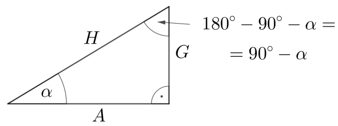
ii) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin^2(\alpha) = [\sin(\alpha)]^2 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

$$\frac{G^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = \frac{\overbrace{G^2 + A^2}^{=H^2}}{H^2} = 1$$

iii) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{G}{H} = \sin(\alpha)$$



Einheitskreis

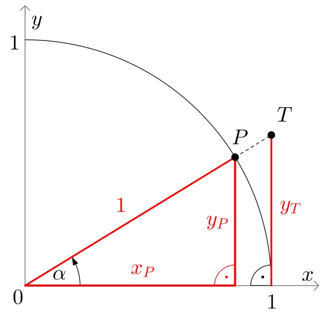
Der **Einheitskreis** hat den Mittelpunkt $M = (0 \mid 0)$ und den Radius $r = 1$.

Rechts siehst du den Einheitskreis im 1. Quadranten dargestellt.

Der Winkel α legt – wie rechts dargestellt – einen Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ am Kreisbogen und einen Punkt $T = (x_T \mid y_T)$ eindeutig fest.

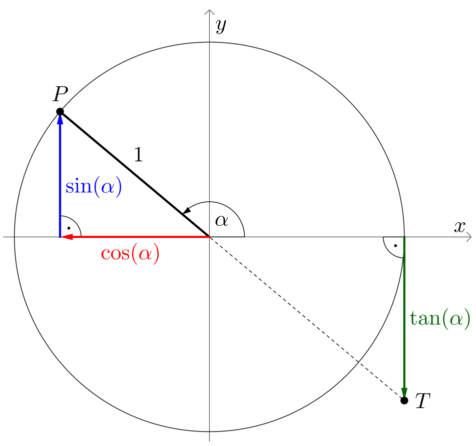
Trage mithilfe von α die Koordinaten dieser Punkte in die Kästchen ein.

$$x_P = \cos(\alpha) \qquad y_P = \sin(\alpha) \qquad x_T = 1 \qquad y_T = \tan(\alpha)$$



Winkelfunktionen am Einheitskreis

Im 1. Quadranten gilt für jeden Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ am Kreisbogen $x_P = \cos(\alpha)$ und $y_P = \sin(\alpha)$.



Diese *Eigenschaft* verwenden wir als *Definition* von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für jeden beliebigen Winkel α, nämlich:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = x_P} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sin(\alpha) = y_P}$$

Berechne mit dem Taschenrechner: Warum ist $\cos(140^\circ) < 0$?

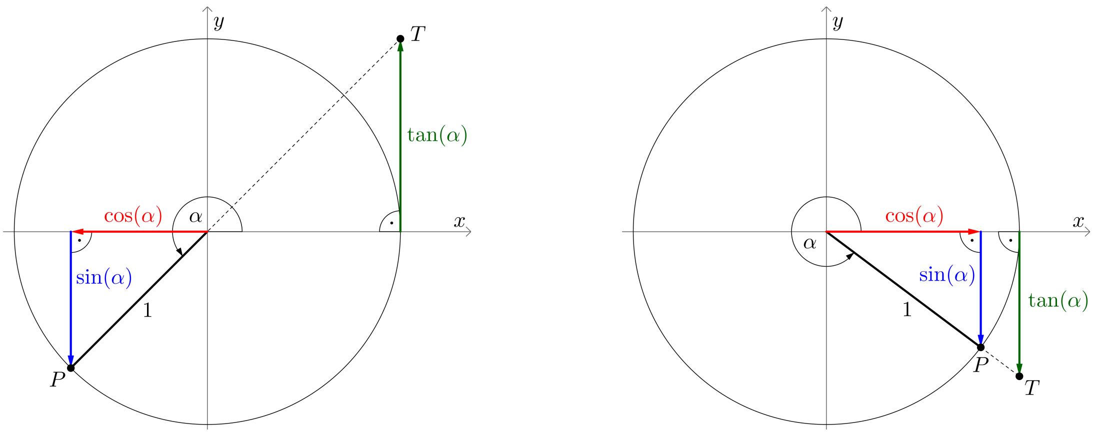
$$\cos(140^\circ) = -0{,}766\ldots \qquad \sin(140^\circ) = 0{,}642\ldots$$

Für Winkel α mit $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt also: $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} < 0$

Damit das Vorzeichen von $\boldsymbol{\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = y_T}$ stimmt, zeichnen wir den Punkt T immer auf der rechten Seite ein.

Winkelfunktionen am Einheitskreis

Wir lassen den Punkt P am Einheitskreis in den 3. Quadranten und 4. Quadranten weiterwandern:



Trage in der Tabelle die Vorzeichen $(+, -)$ der Winkelfunktionen in den vier Quadranten ein.
Welche Werte haben die Winkelfunktionen bei den besonderen Winkeln 0°, 90°, 180°, 270° und 360°?

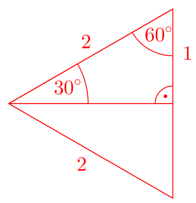
	0°	1.Qu.	90°	2.Qu.	180°	3.Qu.	270°	4.Qu.	360°
$\sin(\alpha)$	0	+	1	+	0	–	–1	–	0
$\cos(\alpha)$	1	+	0	–	–1	–	0	+	1
$\tan(\alpha)$	0	+		–	0	+		–	0

Warum sind $\tan(90°)$ und $\tan(270°)$ *nicht* sinnvoll?

Karusell

Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus sind so für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert.
Erkläre ohne Taschenrechner, warum $\cos(420°) = 0{,}5$ gilt. Hinweis: Teile ein gleichseitiges Dreieck in 2 Hälften.

$$\underbrace{\cos(420°) = \cos(60°)}_{-360°} = 0{,}5$$



Zwei Lösungen für Sinus

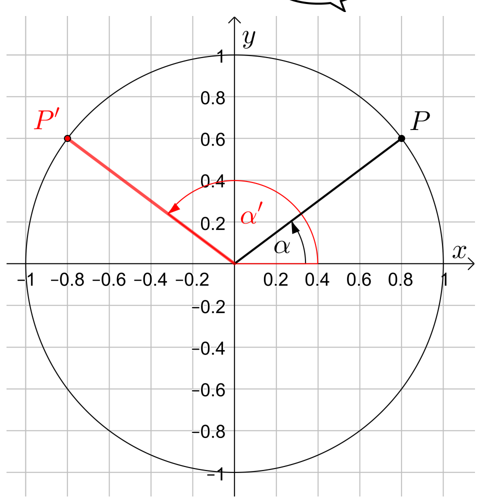
1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\sin(\alpha) = 0{,}6$.

2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen 0° und 360° liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.
$\alpha = \arcsin(0{,}6) = 36{,}86...°$
$\alpha' = 180° - \alpha = 143{,}13...°$



Zwei Lösungen für Cosinus

1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\cos(\alpha) = 0{,}8$.

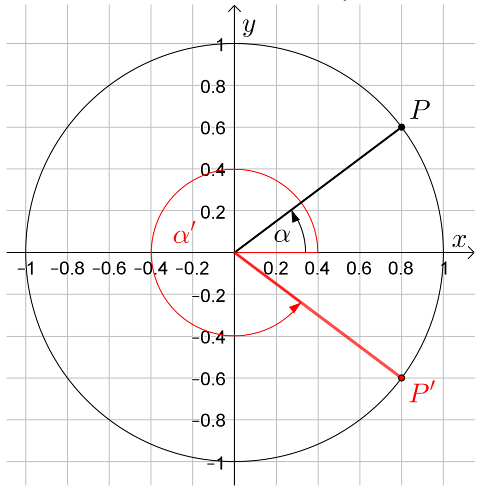
2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen 0° und 360° liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)}$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.

$\alpha = \arccos(0{,}8) = 36{,}86...°$
$\alpha' = 360° - \alpha = 323{,}13...°$



Zwei Lösungen für Tangens

1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\tan(\alpha) = 0{,}6$.

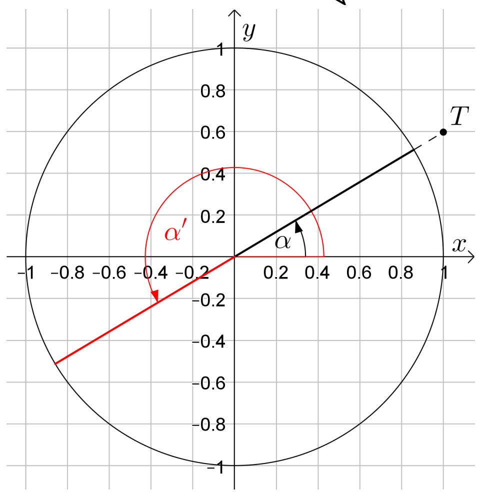
2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen 0° und 360° liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha)}$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.

$\alpha = \arctan(0{,}6) = 30{,}96...°$
$\alpha' = 180° + \alpha = 210{,}96...°$



Goniometrische Gleichungen

Tatsächlich gilt für alle Winkel α:

i) $\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)}$ **ii)** $\boldsymbol{\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)}$ **iii)** $\boldsymbol{\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha)}$

Berechne alle Lösungen der Gleichung, die im Intervall $[0°; 360°[$ liegen.

a) $\sin(\alpha) = -0{,}42$

$\arcsin(-0{,}42) = -24{,}83...°$

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = -24{,}83...° + 360° = 335{,}1...° \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = 180° - (-24{,}83...°) = 204{,}8...°$

b) $\cos(\alpha) = -0{,}42$

$\arccos(-0{,}42) = 114{,}8...°$

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = 114{,}8...° \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = 360° - 114{,}8...° = 245{,}1...°$

c) $\tan(\alpha) = -0{,}42$

$\arctan(-0{,}42) = -22{,}78...°$

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = -22{,}78...° + 360° = 337{,}2...° \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = 180° + (-22{,}78...°) = 157{,}2...°$

Arcussinus – Umkehrfunktion von Sinus

Die **Sinusfunktion** ordnet jedem Winkel in $[-90°; 90°]$

genau eine Zahl im Intervall $[-1; 1]$ zu.

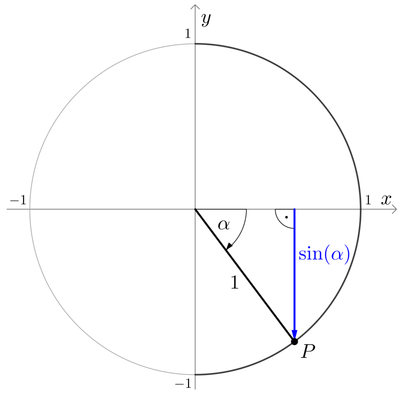
Die Umkehrfunktion **Arcussinus** ordnet

jeder Zahl im Intervall $[-1; 1]$

genau einen Winkel im Intervall $[-90°; 90°]$ zu.

Es gilt also:

$\arcsin(1) = 90°$ $\quad \arcsin(0) = 0°$ $\quad \arcsin(-1) = -90°$



Arcuscosinus – Umkehrfunktion von Cosinus

Die **Cosinusfunktion** ordnet jedem Winkel in $[0°; 180°]$

genau eine Zahl im Intervall $[-1; 1]$ zu.

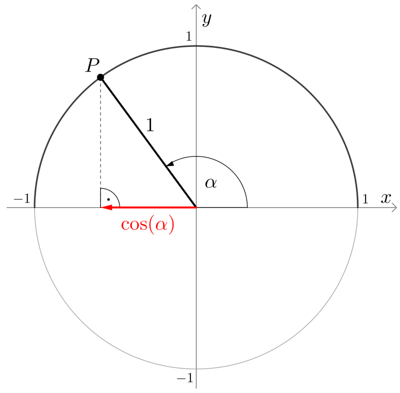
Die Umkehrfunktion **Arcuscosinus** ordnet

jeder Zahl im Intervall $[-1; 1]$

genau einen Winkel im Intervall $[0°; 180°]$ zu.

Es gilt also:

$\arccos(1) = 0°$ $\quad \arccos(0) = 90°$ $\quad \arccos(-1) = 180°$



Arcustangens – Umkehrfunktion von Tangens

Die **Tangensfunktion** ordnet jedem Winkel in $]-90°; 90°[$

genau eine Zahl in $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$ zu.

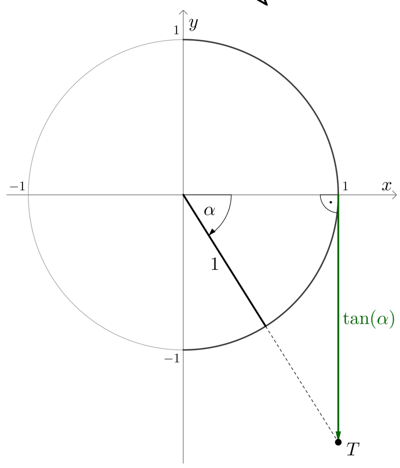
Die Umkehrfunktion **Arcustangens** ordnet

jeder Zahl in $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$

genau einen Winkel im Intervall $]-90°; 90°[$ zu.

Berechne mit dem Taschenrechner:

$\arctan(100) = 89{,}42...°$ $\quad \arctan(0) = 0°$ $\quad \arctan(-100) = -89{,}42...°$



Konzentrische Kreise

Der Punkt A liegt am Einheitskreis.
Der Punkt B liegt am dazu konzentrischen Kreis mit Radius 3.
Es gilt $\alpha = 130°$. Berechne die Koordinaten der beiden Punkte.

$A = (\cos(130°) \mid \sin(130°)) = (-0{,}642... \mid 0{,}766...)$

$B = (3 \cdot \cos(130°) \mid 3 \cdot \sin(130°)) = (-1{,}928... \mid 2{,}298...)$