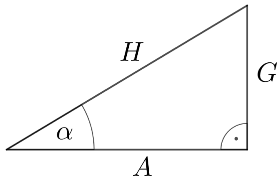
Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Gegeben ist ein spitzer Winkel α. Es gilt also: $\square^\circ < \alpha < \square^\circ$

Rechts unten ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem Winkel α dargestellt.

Erinnere dich an die Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck.

Trage die Seitenlängen A, G und H richtig in die Kästchen ein:



$$\sin(\alpha) = \frac{\square}{\square} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\square}{\square} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\square}{\square}$$

Leite damit die folgenden Formeln für alle spitzen Winkel α her:

i) $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$ **ii)** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ **iii)** $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

$\sin^2(\alpha) = [\,\sin(\alpha)\,]^2 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

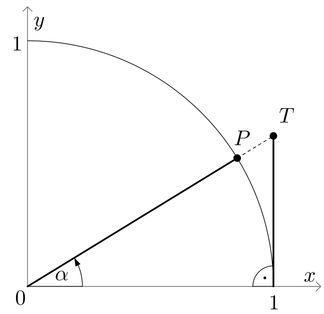
Einheitskreis

Der **Einheitskreis** hat den Mittelpunkt $M = (0 \mid 0)$ und den Radius $r = 1$.

Rechts siehst du den Einheitskreis im 1. Quadranten dargestellt.

Der Winkel α legt – wie rechts dargestellt – einen Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ am Kreisbogen und einen Punkt $T = (x_T \mid y_T)$ eindeutig fest.

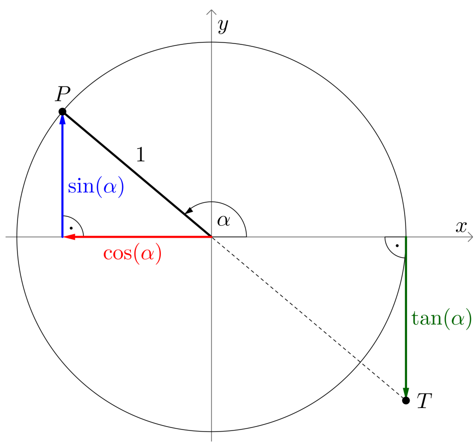
Trage mithilfe von α die Koordinaten dieser Punkte in die Kästchen ein.



$x_P = \square \qquad y_P = \square \qquad x_T = \square \qquad y_T = \square$

Winkelfunktionen am Einheitskreis

Im 1. Quadranten gilt für jeden Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ am Kreisbogen $x_P = \cos(\alpha)$ und $y_P = \sin(\alpha)$.



Diese *Eigenschaft* verwenden wir als *Definition* von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für jeden beliebigen Winkel α, nämlich:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = x_P} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sin(\alpha) = y_P}$$

Berechne mit dem Taschenrechner: Warum ist $\cos(140^\circ) < 0$?

$\cos(140^\circ) = \square \qquad \sin(140^\circ) = \square$

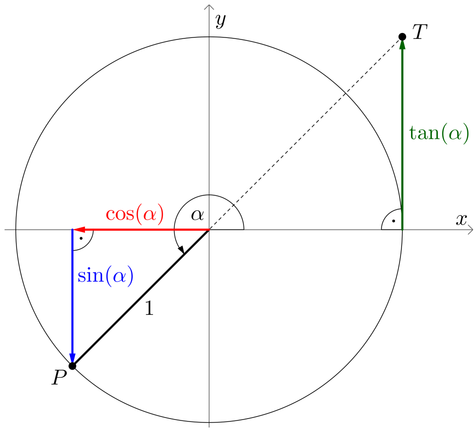
Für Winkel α mit $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt also: $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} < 0$

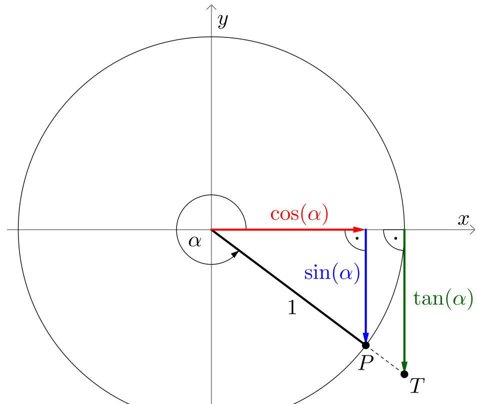
Damit das Vorzeichen von $\boldsymbol{\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = y_T}$ stimmt,

zeichnen wir den Punkt T immer auf der rechten Seite ein.

Winkelfunktionen am Einheitskreis

Wir lassen den Punkt P am Einheitskreis in den 3. Quadranten und 4. Quadranten weiterwandern:





Trage in der Tabelle die Vorzeichen $(+, -)$ der Winkelfunktionen in den vier Quadranten ein.
Welche Werte haben die Winkelfunktionen bei den besonderen Winkeln $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ und $360°$?

	$0°$	1.Qu.	$90°$	2.Qu.	$180°$	3.Qu.	$270°$	4.Qu.	$360°$
$\sin(\alpha)$									
$\cos(\alpha)$									
$\tan(\alpha)$									

Warum sind $\tan(90°)$ und $\tan(270°)$ *nicht* sinnvoll?

Karusell

Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus sind so für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert.
Erkläre ohne Taschenrechner, warum $\cos(420°) = 0{,}5$ gilt. Hinweis: Teile ein gleichseitiges Dreieck in 2 Hälften.

Zwei Lösungen für Sinus

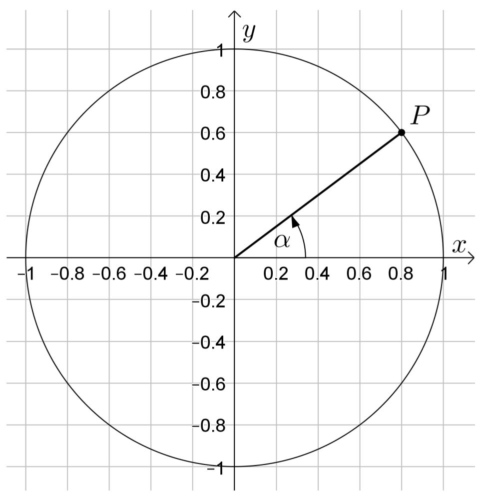
1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\sin(\alpha) =$ ______ .

2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen $0°$ und $360°$ liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)}$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.



Zwei Lösungen für Cosinus

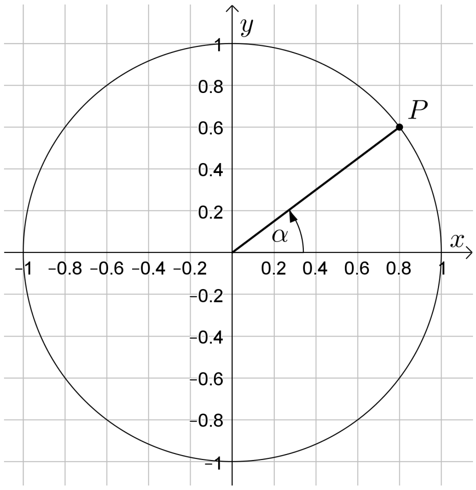
1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\cos(\alpha) = \boxed{}$.

2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen $0°$ und $360°$ liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)}$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.



Zwei Lösungen für Tangens

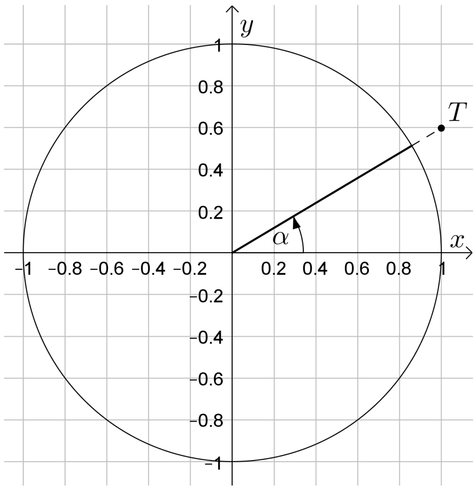
1) Der eingezeichnete Winkel α ist eine Lösung der Gleichung $\tan(\alpha) = \boxed{}$.

2) Diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung α', die zwischen $0°$ und $360°$ liegt.
Konstruiere rechts diesen zweiten Winkel α'.

3) Erkläre damit den folgenden Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha)}$$

4) Berechne mit dem Taschenrechner beide Lösungen.



Goniometrische Gleichungen

Tatsächlich gilt für alle Winkel α:

i) $\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)}$ **ii)** $\boldsymbol{\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)}$ **iii)** $\boldsymbol{\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha)}$

Berechne alle Lösungen der Gleichung, die im Intervall $[0°; 360°[$ liegen.

a) $\sin(\alpha) = -0{,}42$

b) $\cos(\alpha) = -0{,}42$

c) $\tan(\alpha) = -0{,}42$

Arcussinus – Umkehrfunktion von Sinus

Die **Sinusfunktion** ordnet jedem Winkel in $[-90°; 90°]$

genau eine Zahl im Intervall $\square$ zu.

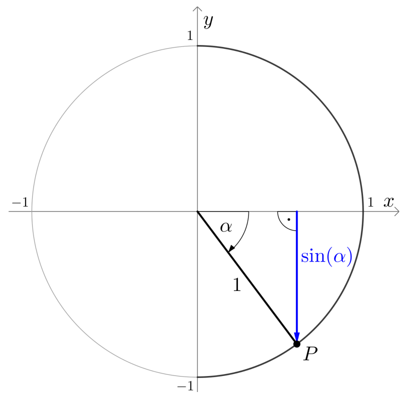
Die Umkehrfunktion **Arcussinus** ordnet

jeder Zahl im Intervall $\square$

genau einen Winkel im Intervall $\square$ zu.

Es gilt also:

$\arcsin(1) = \square$ $\arcsin(0) = \square$ $\arcsin(-1) = \square$



Arcuscosinus – Umkehrfunktion von Cosinus

Die **Cosinusfunktion** ordnet jedem Winkel in $[0°; 180°]$

genau eine Zahl im Intervall $\square$ zu.

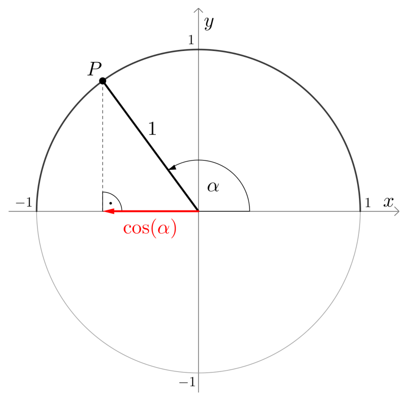
Die Umkehrfunktion **Arcuscosinus** ordnet

jeder Zahl im Intervall $\square$

genau einen Winkel im Intervall $\square$ zu.

Es gilt also:

$\arccos(1) = \square$ $\arccos(0) = \square$ $\arccos(-1) = \square$



Arcustangens – Umkehrfunktion von Tangens

Die **Tangensfunktion** ordnet jedem Winkel in $]-90°; 90°[$

genau eine Zahl in $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$ zu.

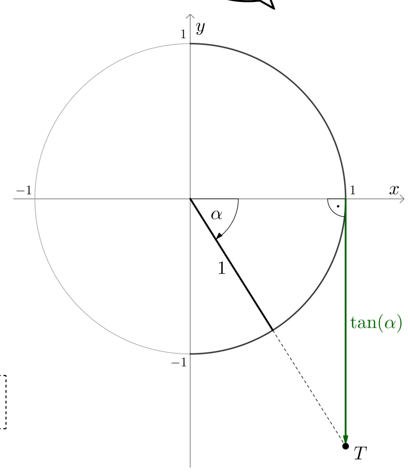
Die Umkehrfunktion **Arcustangens** ordnet

jeder Zahl in $\mathbb{R} =]-\infty; \infty[$

genau einen Winkel im Intervall $\square$ zu.

Berechne mit dem Taschenrechner:

$\arctan(100) = \square$ $\arctan(0) = \square$ $\arctan(-100) = \square$



Konzentrische Kreise

Der Punkt A liegt am Einheitskreis.
Der Punkt B liegt am dazu konzentrischen Kreis mit Radius 3.
Es gilt $\alpha = 130°$. Berechne die Koordinaten der beiden Punkte.