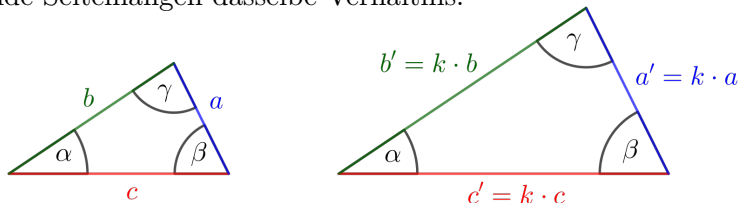



Zwei Dreiecke sind zueinander **ähnlich**, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.
 In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Die Zahl k nennen wir auch **Skalierungsfaktor**.



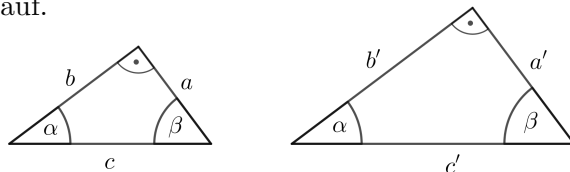
Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck  **MmF**

Die beiden dargestellten **rechtwinkligen** Dreiecke haben den gleichen spitzen Winkel α .
 Der dritte Winkel β muss dann auch in beiden Dreiecken gleich groß sein. Warum?
 Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von β auf.

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

Rechne nach, dass aus $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ auch $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgt. $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} \iff c' \cdot a = a' \cdot c \iff \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \checkmark$

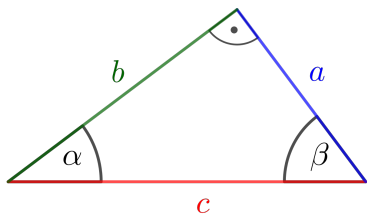


Kennt man von einem rechtwinkligen Dreieck einen spitzen Winkel α ,
 dann ist also jedes Verhältnis von 2 Seitenlängen **eindeutig** festgelegt.

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck   **MmF**

Die **Kathete** a liegt *gegenüber* von α . Sie heißt deshalb **Gegenkathete von α** .
 Die **Kathete** b liegt *am* Winkel α *an*. Sie heißt deshalb **Ankathete von α** .


Die **Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens** ordnen jedem spitzen Winkel α
 ein Seitenverhältnis im **rechtwinkligen** Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \text{„Sinus von } \alpha\text{“}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \text{„Cosinus von } \alpha\text{“}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b} \quad \text{„Tangens von } \alpha\text{“}$$

Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke  **MmF**

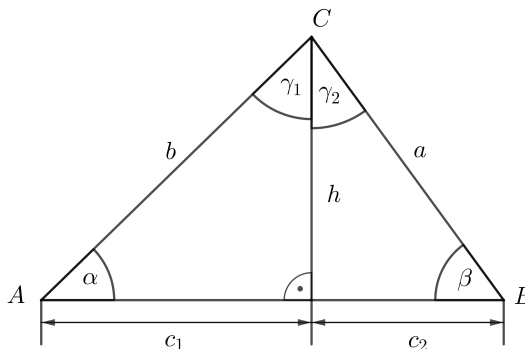
Das Dreieck ABC wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
 Trage die richtigen Seitenlängen in die Kästchen ein.

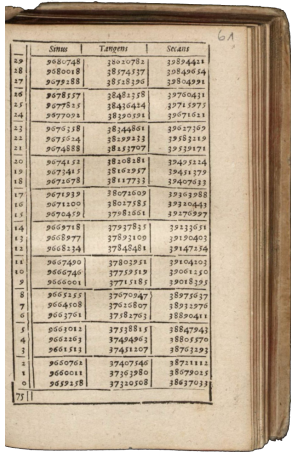
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} \quad \tan(\alpha) = \frac{h}{c_1}$$

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \quad \cos(\beta) = \frac{c_2}{a} \quad \tan(\beta) = \frac{h}{c_2}$$

$$\sin(\gamma_1) = \frac{c_1}{b} \quad \cos(\gamma_1) = \frac{h}{b} \quad \tan(\gamma_1) = \frac{c_1}{h}$$

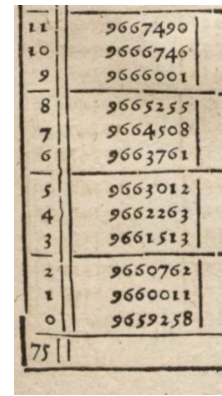
$$\sin(\gamma_2) = \frac{c_2}{a} \quad \cos(\gamma_2) = \frac{h}{a} \quad \tan(\gamma_2) = \frac{c_2}{h}$$





Links siehst du eine Seite aus einem Tabellenbuch aus dem Jahr 1619. Auf diese Seite sind die Werte von $\sin(\alpha)$ für einige Winkel α mit $75^\circ \leq \alpha \leq 75,5^\circ$ gedruckt.

Rechts siehst du einen vergrößerten Ausschnitt der Seite. Berechne mit dem Taschenrechner:



$\sin(75^\circ) = 0,965925\dots$ Findest du diesen Wert rechts?

Eine Winkelminute ($1'$) ist $\frac{1}{60}$ von einem Grad (1°).

$\sin(75^\circ 6') = \sin(75,1^\circ) = 0,966376\dots$

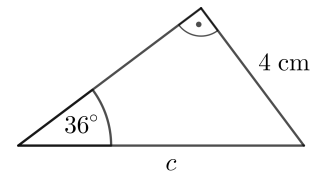
Dein Taschenrechner kann diese Werte mithilfe von [Taylor-Reihen](#) berechnen.

Seitenlänge gesucht



Berechne die Seitenlänge c im rechts dargestellten Dreieck.

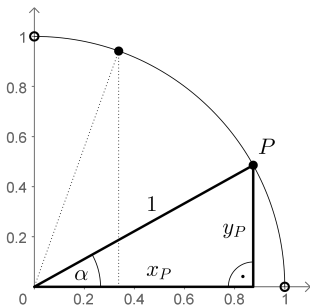
$$\sin(36^\circ) = \frac{4}{c} \iff c \cdot \sin(36^\circ) = 4 \iff c = \frac{4}{\sin(36^\circ)} = 6,80\dots \text{ cm}$$



Arcusfunktionen



Der Kreisbogen mit Mittelpunkt $(0 | 0)$ und Radius 1 ist im Koordinatensystem unten eingezeichnet. Jedem *spitzen* Winkel α entspricht – wie dargestellt – ein Punkt $P = (x_P | y_P)$ auf dem Kreisbogen.



1) Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von y_P auf.

$y_P = \sin(\alpha)$

2) Wie groß bzw. wie klein kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α also sein?

$0 < \sin(\alpha) < 1$

Die Zuordnung von Winkel zu Seitenverhältnis kann für *spitze* Winkel [umgekehrt](#) werden. Berechne mit dem Taschenrechner:

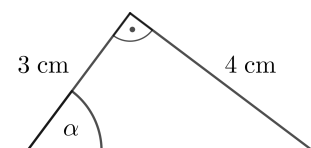
$\sin(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arcsin(0,5) = 30^\circ$ „Arcussinus von 0,5“
 $\cos(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arccos(0,5) = 60^\circ$ „Arcuscosinus von 0,5“
 $\tan(\alpha) = 0,5 \iff \alpha = \arctan(0,5) = 26,56\dots^\circ$ „Arcustangens von 0,5“

Winkel gesucht



Berechne den Winkel α im rechts dargestellten Dreieck.

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13\dots^\circ$



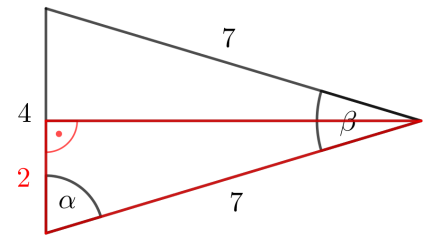
Gleichschenkeliges Dreieck 

Berechne die Winkel α und β im rechts dargestellten Dreieck.

Da das Dreieck gleichschenkelig ist, können wir es in zwei zueinander kongruente rechtwinkelige Dreiecke zerlegen.

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{7} \implies \alpha = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) = 73,39\dots^\circ$$

$$2 \cdot \alpha + \beta = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 33,20\dots^\circ$$



Trapez 

Im rechts unten dargestellten Trapez gilt: $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 53^\circ$, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm

Berechne den Umfang u vom Trapez.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \sin(\beta) = 3,99\dots \text{ cm}$$

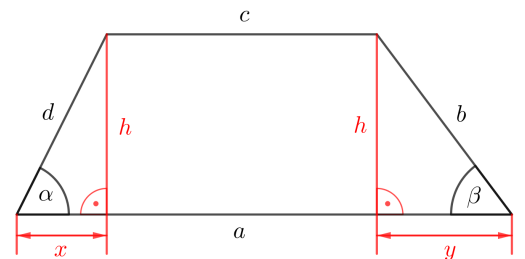
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{d} \implies d = \frac{h}{\sin(\alpha)} = 4,48\dots \text{ cm}$$


$$x^2 + h^2 = d^2 \implies x = \sqrt{d^2 - h^2} = 2,03\dots \text{ cm}$$

$$y^2 + h^2 = b^2 \implies y = \sqrt{b^2 - h^2} = 3,00\dots \text{ cm}$$

$$a = c + x + y = 11,04\dots \text{ cm}$$

$$u = a + b + c + d = 26,52\dots \text{ cm}$$



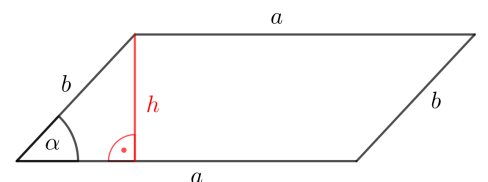
Trigonometrische Flächenformel 

Rechts ist ein Parallelogramm dargestellt. Stelle mithilfe von a , b und α eine Formel für seinen Flächeninhalt F auf.

$$F = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Begründung: Für den Flächeninhalt F vom Parallelogramm gilt $F = a \cdot h$.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \sin(\alpha) \implies F = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$



Daraus folgt auch die sogenannte trigonometrische Flächenformel. Mehr dazu findest du am [Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck](#).

