Ergebnisse & Ereignisse

Ein **Zufallsexperiment** kann verschiedene **Ergebnisse** haben.

Die Menge der möglichen Ergebnisse nennen wir den **Ergebnisraum $\boldsymbol{\Omega}$**.

Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge von Ω.

Zufallsexperimente

a) Beim Wurf einer Münze gibt es 2 mögliche Ergebnisse:

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

Ereignis: $A = \{\text{Kopf}\} =$ „Münze zeigt Kopf."

b) Beim Wurf eines fairen 6-seitigen Spielwürfels gibt es 6 mögliche Ergebnisse:

$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

Ereignis: $G = \{$⚁, ⚃, ⚅$\} =$ „Würfel zeigt gerade Augenzahl."

c) Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind.

Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Mit einer Kugel wird ein Feld nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Es gibt 37 mögliche Ergebnisse:

$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$

Ereignis: $U = \{1, 3, 5, \ldots, 33, 35\} =$

$=$ „Kugel landet auf Feld mit ungerader Zahl."

d) Du würfelst mit zwei fairen 6-seitigen Spielwürfeln. Wenn das Ergebnis des Zufallsexperiments die Augensumme der beiden Würfel ist, dann gibt es 11 mögliche Ergebnisse:

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 12\}$

Beschreibe die Ereignisse in Worten:

$A = \{7\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{9, 10, 11, 12\}$, $D = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$A =$ „Augensumme 7 würfeln"

$C =$ „mindestens Augensumme 9 würfeln"

$B =$ „Augensumme 2 oder 4 würfeln"

$D =$ „Primzahl als Augensumme würfeln"

Bei diesem Zufallsexperiment treten die 11 möglichen Ergebnisse *nicht* alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

Mit dieser Modellierung ist es also *kein* Laplace-Experiment.

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow

Bei Zufallsexperimenten mit endlich vielen möglichen Ergebnissen ordnen wir jedem Ereignis A eine Zahl $\boldsymbol{P(A)}$ zu, nämlich die **Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $\boldsymbol{A}$ eintritt**. (engl. **p**robability)

Diese Zuordnung muss die folgenden Eigenschaften haben: Die Funktion P heißt Wahrscheinlichkeitsmaß.

i) $0 \leq P(A) \leq 1$ — Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen kann *nicht* kleiner als 0 % oder größer als 100 % sein.

ii) $P(\Omega) = 1$ — Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist mit 100 %-iger Wahrscheinlichkeit in Ω.

iii) $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$, falls die Ereignisse A und B *kein* Ergebnis gemeinsam haben.

Wir sagen auch: „Die Ereignisse A und B schließen einander aus."

Diese Eigenschaften **i)**, **ii)** und **iii)** sind sogenannte Axiome.

Sie wurden im Jahr 1933 veröffentlicht und bilden heutzutage die Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Gezinkter Würfel

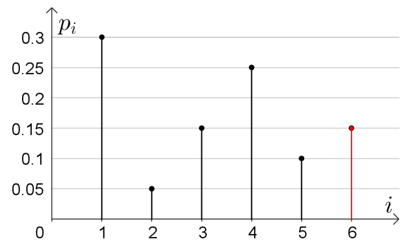
Wir würfeln mit einem bestimmten gezinkten 6-seitigen Würfel: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

Bei einem gezinkten Würfel sind die 6 möglichen Ergebnisse *nicht* alle gleich wahrscheinlich.

Mit p_i wird die Wahrscheinlichkeit abgekürzt, dass der Würfel die Augenzahl i zeigt.

Im folgenden Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5 dargestellt:

1) Übertrage die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_5$ aus dem Stabdiagramm in die folgende Tabelle.



Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$p_i = P(\{\omega_i\})$	30 %	5 %	15 %	25 %	10 %	15 %

2) Ermittle p_6, und zeichne rechts den zugehörigen Stab ein.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 85\,\% \implies p_6 = 100\,\% - 85\,\% = 15\,\%$$

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit diesem Würfel mindestens die Augenzahl 5 würfelt.

$P(\{$⚄, ⚅$\}) = P(\{$⚄$\}$ oder $\{$⚅$\}) \overset{\text{iii)}}{=} p_5 + p_6 = 10\,\% + 15\,\% = 25\,\%$

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn es die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1) Es gibt nur *endlich* viele Ergebnisse: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

2) Jedes dieser Ergebnisse tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein:

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Laplace-Experiment?

Welche der folgenden Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente?

a) Einen fairen 6-seitigen Würfel einmal werfen.
Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die gewürfelte Augenzahl.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ω endlich?		Jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich?		Laplace-Experiment?	
ja	nein	ja	nein	ja	nein
☒	☐	☒	☐	☒	☐

b) Aus einer Box mit 3 schwarzen und 2 weißen Kugeln eine Kugel nach dem Zufallsprinzip ziehen.
Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die Farbe der gezogenen Kugel.

$\Omega = \{\text{schwarz}, \text{weiß}\}$

Ω endlich?		Jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich?		Laplace-Experiment?	
ja	nein	ja	nein	ja	nein
☒	☐	☐	☒	☐	☒

c) Einen fairen 6-seitigen Würfel so lange werfen, bis zum ersten Mal ein Sechser gewürfelt wird.
Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die Anzahl der dafür benötigten Würfe.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Ω endlich?		Jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich?		Laplace-Experiment?	
ja	nein	ja	nein	ja	nein
☐	☒	☐	☒	☐	☒

„Günstig durch möglich“

Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind.

Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Mit einer Kugel wird ein Feld nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Die Kugel landet auf jedem der Felder in $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ also mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$.

Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf einem roten Feld landet, gilt:

$$\implies \quad P(\text{„Rot“}) = \underbrace{\frac{1}{37} + \frac{1}{37} + \cdots + \frac{1}{37}}_{18 \text{ Summanden}} = \frac{18}{37}$$

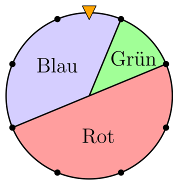
Allgemein gilt bei Laplace-Experimenten für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

Dieser neue Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also mit unserem bisherigen Zugang bei Laplace-Experimenten verträglich. Mit ihm können wir aber zusätzlich Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten berechnen, die *keine* Laplace-Experimente sind.

Glücksrad

Beim dargestellten Glücksrad sind 3 verschiedene Ergebnisse möglich: $\Omega = \{\text{Blau}, \text{Grün}, \text{Rot}\}$



1) Trage die Wahrscheinlichkeiten (in %) in die Tabelle ein.

Ergebnis ω_i	Blau	Grün	Rot
$P(\{\omega_i\})$	$\frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$	$\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$	$\frac{4}{8} = 50\,\%$

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis *nicht* Blau ist.

$$P(\text{„nicht blau“}) = P(\text{„grün oder rot“}) = 12{,}5\,\% + 50\,\% = 62{,}5\,\%$$

Gezinkter Würfel

Bei einem bestimmten gezinkten 6-seitigen Würfel treten die Augenzahlen 1 bis 5 mit gleicher Wahrscheinlichkeit p auf. Die Augenzahl 6 ist dreimal so wahrscheinlich wie die Augenzahl 1.

1) Berechne p. Trage die Wahrscheinlichkeiten (in %) in die Tabelle ein.

$$p + p + p + p + p + 3 \cdot p = 1 \implies p = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$$

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$	12,5 %	12,5 %	12,5 %	12,5 %	12,5 %	37,5 %

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit diesem gezinkten Würfel eine gerade Augenzahl zu werfen.

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$$

Relative Häufigkeiten als Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten

Magdalena erhält einen gezinkten Würfel, aber kennt seine Wahrscheinlichkeiten *nicht*.
Magdalena wirft ihn 1000 Mal und notiert die Ergebnisse.
Die absoluten Häufigkeiten der 6 Augenzahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Ergebnis	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Absolute Häufigkeit	84	190	218	127	139	242

1) Trage die relativen Häufigkeiten als Brüche und die prozentuellen Häufigkeiten in die Tabelle ein.

Ergebnis	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Relative Häufigkeit	$\frac{84}{1000}$	$\frac{190}{1000}$	$\frac{218}{1000}$	$\frac{127}{1000}$	$\frac{139}{1000}$	$\frac{242}{1000}$
Prozentuelle Häufigkeit	8,4 %	19 %	21,8 %	12,7 %	13,9 %	24,2 %

2) Verwende die prozentuellen Häufigkeiten als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten, um die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Augenzahl mit diesem Würfel zu schätzen.

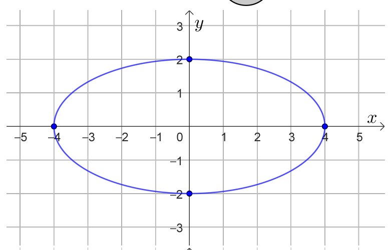
$$19\,\% + 12{,}7\,\% + 24{,}2\,\% = 55{,}9\,\%$$

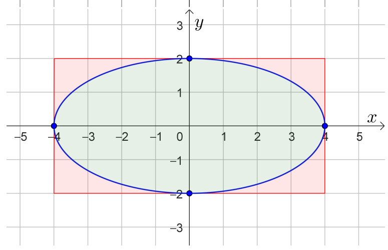
Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Die rechts dargestellte Ellipse wird durch die Gleichung

$$x^2 + 4 \cdot y^2 = 16 \qquad y = 0 \implies x = \pm 4 \quad \text{bzw.} \quad x = 0 \implies y = \pm 2$$

festgelegt. Trage die beiden fehlenden Zahlen in die Kästchen ein.





Ihren Flächeninhalt können wir mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung annähern:

i) Im Bild rechts umschreiben wir der Ellipse ein Rechteck.
Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt 32.

ii) Wir erzeugen nach dem Zufallsprinzip eine Zufallszahl $x \in \mathbb{R}$ mit $-4 \leq x \leq 4$ und eine Zufallszahl $y \in \mathbb{R}$ mit $-2 \leq y \leq 2$.

Der Punkt $(x \mid y)$ liegt genau dann auf oder innerhalb der Ellipse, wenn $x^2 + 4 \cdot y^2 \leq 16$ gilt.

iii) Das Python-Programm unten rechts hat 100 000 Paare solcher Zufallszahlen erzeugt.
Davon waren 78 545 Paare auf oder innerhalb der Ellipse.

iv) Der relative Anteil der Ellipse am Rechteck beträgt also rund $\frac{78\,545}{100\,000}$.

v) Berechne damit einen Näherungswert für den Flächeninhalt der Ellipse.

$$32 \cdot \frac{78\,545}{100\,000} = 25{,}1344$$

```python
from random import uniform

versuche = 100000
treffer = 0

for i in range(versuche):
    x = uniform(-4,4)
    y = uniform(-2,2)
    if(x**2 + 4*y**2 <= 16):
        treffer += 1

print("Von den", versuche, "Versuchen waren", treffer, "in der Ellipse.")
```

```
Kommandozeile
>>> %Run Ellipse.py
Von den 100000 Versuchen waren 78545 in der Ellipse.
```

Der *exakte* Flächeninhalt dieser Ellipse ist $8 \cdot \pi = 25{,}1327...$.