Zufallsvariable

Der Wert einer Zufallsvariablen hängt vom Ergebnis eines Zufallsexperiments ab.
Eine **Zufallsvariable X** ordnet jedem möglichen Ergebnis im Ergebnisraum Ω eine reelle Zahl zu.

Laplace-Experiment

Würfle mit einem fairen 6-seitigen Würfel und gewinne das 10-fache der gewürfelten Augenzahl in €.
Dieses Spiel können wir als Zufallsexperiment mit einer Zufallsvariablen X modellieren:

$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$ —Zufall→ z. B. ⚄ $\xmapsto{\text{Zufallsvariable } X}$ $X(⚄) = 50$ €

mögliche Ergebnisse — Ergebnis des Zufallsexperiments

Formal ist eine Zufallsvariable X eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Die Zufallsvariable X gibt – abhängig vom Würfelergebnis – den Gewinn in € an.
Trage die Wahrscheinlichkeiten und die Werte der Zufallsvariablen in die Tabelle ein.

ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$X(\omega_i)$	10 €	20 €	30 €	40 €	50 €	60 €

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel genau 50 € zu gewinnen?

$P(X = 50 \text{ €}) = P(\{⚄\}) = \frac{1}{6} = 16{,}66...\%$

Formal ist $X = 50$ € das Ereignis, dass X den Wert 50 € annimmt: $\{⚄\}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel mehr als 42 € zu gewinnen?

$P(X > 42 \text{ €}) = P(\{⚄, ⚅\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = 33{,}33...\%$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel höchstens 20 € zu gewinnen?

$P(X \leq 20 \text{ €}) = P(\{⚀, ⚁\}) = \frac{2}{6} = 33{,}33...\%$

d) Welchen *durchschnittlichen* Gewinn erwartest du nach vielen Wiederholungen des Spiels?

$\frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60}{6} = 35$ € (Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich.)

Erwartungswert

Die Zufallsvariable X kann n *verschiedene* Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen.
Der **Erwartungswert von X** wird mit $E(X)$ abgekürzt und folgendermaßen berechnet:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 \cdot \underbrace{P(X = x_1)} + x_2 \cdot \underbrace{P(X = x_2)} + \cdots + x_n \cdot \underbrace{P(X = x_n)}$$

Bei der Berechnung von $E(X)$ sind die Wahrscheinlichkeiten wie Gewichte. Je größer $P(X = x_i)$ ist, desto höher ist x_i gewichtet.

Gleiche Gewichte

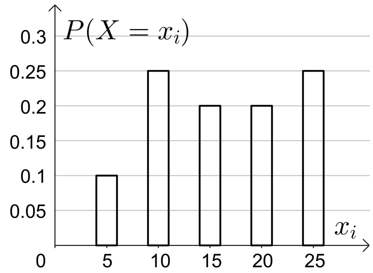
Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen X aus der obigen Würfelaufgabe.

$$E(X) = 10 \text{ €} \cdot \frac{1}{6} + 20 \text{ €} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 60 \text{ €} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10 \text{ €} + 20 \text{ €} + \cdots + 60 \text{ €}}{6} = 35 \text{ €}$$

Treten alle Werte von X mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, dann ist $E(X)$ das arithmetische Mittel dieser Werte.

Verschiedene Gewichte

Die Zufallsvariable X kann die Werte 5, 10, 15, 20 und 25 annehmen.
Die Wahrscheinlichkeiten für diese Werte sind rechts in einem Säulendiagramm dargestellt.



1) Berechne die angegebenen Wahrscheinlichkeiten (in %).

$P(X > 15) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45 = 45\,\%$

$P(X \leq 10) = 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}35 = 35\,\%$

$P(10 < X \leq 23) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4 = 40\,\%$

2) Berechne den Erwartungswert von X.

$$E(X) = 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}25 = 16{,}25$$

Gezinkter Würfel

Du würfelst einmal mit einem gezinkten 6-seitigen Würfel.
Die Wahrscheinlichkeiten für die 6 Augenzahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$	8 %	20 %	15 %	5 %	10 %	42 %

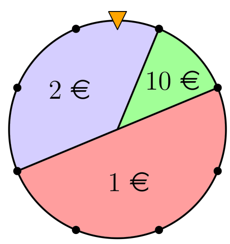
Bei einer ungeraden Augenzahl gewinnst du 2 €. Bei einer geraden Augenzahl gewinnst du 5 €.
Die Zufallsvariable X gibt deinen Gewinn bei einem Wurf an.
Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne den Erwartungswert von X.

x_i	2 €	5 €
$P(X = x_i)$	33 %	67 %

$E(X) = 2\text{ €} \cdot 0{,}33 + 5\text{ €} \cdot 0{,}67 = 4{,}01\text{ €}$

Glücksrad

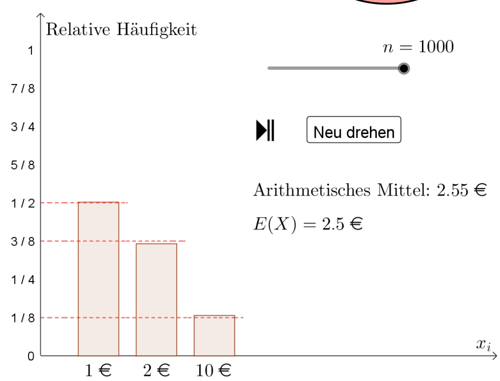
In einem Casino gibt es beim dargestellten Glücksrad 3 mögliche Ergebnisse.
Abhängig vom Ergebnis zahlt das Casino den jeweils angegebenen Betrag aus.
Die Zufallsvariable X gibt die Auszahlung abhängig vom gedrehten Ergebnis an.
Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne $E(X)$.



x_i	1 €	2 €	10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 1\text{ €} \cdot \frac{4}{8} + 2\text{ €} \cdot \frac{3}{8} + 10\text{ €} \cdot \frac{1}{8} = 2{,}50\text{ €}$$

Den Erwartungswert können wir so interpretieren:
Bei sehr vielen Versuchen ist eine *durchschnittliche* Auszahlung von rund 2,50 € pro Drehung zu erwarten.



Roulette

Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind.
Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Mit einer Kugel wird ein Feld nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder auf „Schwarz“.
Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Armin setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn (nach Abzug vom Einsatz) an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

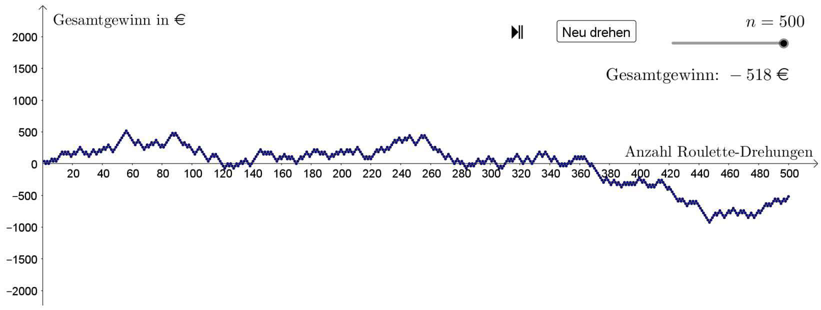
2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i	37 €	-37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37\text{ €} \cdot \frac{18}{37} + (-37\text{ €}) \cdot \frac{19}{37} = 18\text{ €} - 19\text{ €} = -1\text{ €}$$

Den Erwartungswert können wir so interpretieren:

Wenn Armin sehr oft 37 € auf „Rot“ setzt, dann hat er einen *durchschnittlichen* Verlust von rund 1 € pro Spiel zu erwarten.



Galton-Brett

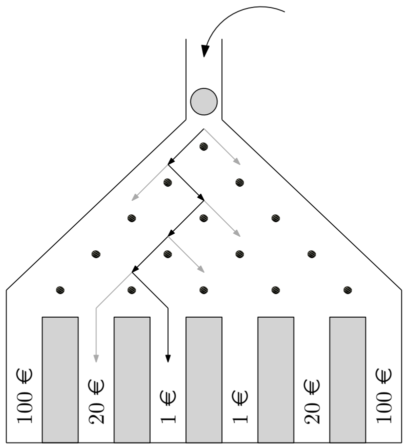
Bei einem Glücksspiel wirfst du eine Kugel oben in das rechts unten dargestellte Galton-Brett ein.

Jedes Mal, wenn die Kugel auf einen Nagel ● trifft, fällt sie nach dem Zufallsprinzip entweder nach links oder nach rechts.
Das Fach, in dem die Kugel landet, gibt deinen Gewinn X an.

Beim rechts eingezeichneten Weg gewinnst du zum Beispiel 1 €.

Du kannst aber auch 20 € oder 100 € gewinnen.

Wie viel Geld würdest du intuitiv höchstens für das Einwerfen einer Kugel bezahlen?



Am Arbeitsblatt – Laplace-Experimente haben wir die Wahrscheinlichkeiten für jedes Fach berechnet. Damit gilt:

x_i	1 €	20 €	100 €
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

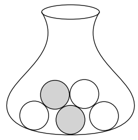
Berechne den Erwartungswert von X.

$$E(X) = 1\text{ €} \cdot \frac{10}{16} + 20\text{ €} \cdot \frac{5}{16} + 100\text{ €} \cdot \frac{1}{16} \approx 13{,}13\text{ €}$$

Faires Spiel

Bei einem Spiel gibt die Zufallsvariable X den Gewinn (nach Abzug vom Einsatz) an.
Das Spiel heißt **fair**, wenn $\boldsymbol{E(X) = 0}$ gilt.

Urnenmodell



In einer Urne sind 2 graue Kugeln und 3 weiße Kugeln.
Gegen einen Einsatz von 10 € ziehst du nach dem Zufallsprinzip eine Kugel aus der Urne.
Ist die gezogene Kugel weiß, erhältst du 7 €. Das Spiel soll fair sein.

Wie viel € musst du erhalten, wenn die gezogene Kugel grau ist?

$X \ldots$ Gewinn (nach Abzug vom Einsatz)
2 mögliche Werte: $x_1 = -3$ € (weiß) und x_2 (grau)

$$E(X) = 0 \quad \iff \quad -3 \cdot \frac{3}{5} + x_2 \cdot \frac{2}{5} = 0 \quad \iff \quad x_2 = 4{,}5 \text{ €}$$

Damit das Spiel fair ist, muss man bei einer grauen Kugel 14,5 € erhalten.

Kenngrößen einer diskreten Zufallsvariablen

Die Zufallsvariable X kann n verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen.

1) Der **Erwartungswert** von X wird auch mit μ abgekürzt und folgendermaßen berechnet:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)}$$

2) Die **Varianz** von X wird mit $V(X)$ oder σ^2 abgekürzt und folgendermaßen berechnet:

$$\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$$

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Werte x_i um den Erwartungswert μ.

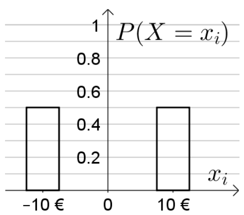
3) Die **Standardabweichung** von X wird mit σ abgekürzt und folgendermaßen berechnet:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V(X)}}$$

Auch die Standardabweichung σ ist ein Streuungsmaß.
Anders als die Varianz hat σ aber die gleiche Einheit wie die Werte x_i.

Gleicher Erwartungswert / Verschiedene Varianz

Die Zufallsvariablen X und Y können jeweils nur 2 verschiedene Werte annehmen.
Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X und von Y.



$E(X) = 0$ €

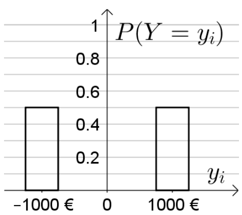
$V(X) = 100$

$\sigma(X) = 10$ €

$E(Y) = 0$ €

$V(Y) = 1\,000\,000$

$\sigma(Y) = 1000$ €



$E(X) = -10 \text{ €} \cdot 0{,}5 + 10 \text{ €} \cdot 0{,}5 = 0 \text{ €}$

$V(X) = 100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 100 \implies \sigma(X) = 10 \text{ €}$

$E(Y) = -1000 \text{ €} \cdot 0{,}5 + 1000 \text{ €} \cdot 0{,}5 = 0 \text{ €}$

$V(Y) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}5 + 1\,000\,000 \cdot 0{,}5 = 1\,000\,000 \implies \sigma(Y) = 1000 \text{ €}$

Umkehraufgabe

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte 0, 10 und 20 annehmen. Dabei gilt:

- $P(X = 20) = 0{,}1$
- $E(X) = 9$

x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$	a	b	0,1

1) Berechne die Wahrscheinlichkeiten a und b.

2) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X.

1) $E(X) = 0 \cdot a + 10 \cdot b + 20 \cdot 0{,}1 = 10 \cdot b + 2$

$$E(X) = 9 \iff 10 \cdot b + 2 = 9 \iff b = 0{,}7$$

$$a + b + 0{,}1 = 1 \iff a = 0{,}2$$

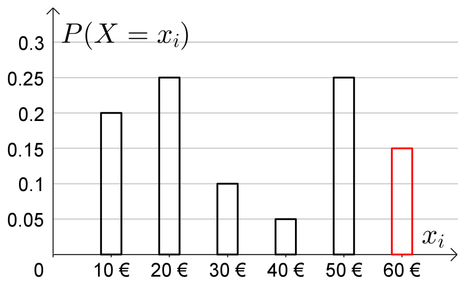
2) $V(X) = 9^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}7 + 11^2 \cdot 0{,}1 = 29$

$\sigma(X) = \sqrt{29} = 5{,}38...$

Gezinkter Würfel

Bei einem Glücksspiel wirft man einen gezinkten 6-seitigen Würfel: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Als Gewinn erhält man das 10-fache der gewürfelten Augenzahl in €.
Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn in € an.
Im Säulendiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten dargestellt, um 10 €, 20 €, ..., 50 € zu gewinnen.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, 60 € zu gewinnen.
Zeichne rechts die zugehörige Säule ein.
Trage in der Tabelle die möglichen Gewinne und ihre Wahrscheinlichkeiten (in %) ein.



Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Gewinn x_i	10 €	20 €	30 €	40 €	50 €	60 €
$P(X = x_i)$	20 %	25 %	10 %	5 %	25 %	15 %

2) Berechne den Erwartungswert von X.

$$E(X) = 10\text{ €} \cdot 0{,}2 + 20\text{ €} \cdot 0{,}25 + \dots + 60\text{ €} \cdot 0{,}15 = 33{,}5\text{ €}$$

3) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X.

$$V(X) = 23{,}5^2 \cdot 0{,}2 + 13{,}5^2 \cdot 0{,}25 + 3{,}5^2 \cdot 0{,}1 + 6{,}5^2 \cdot 0{,}05 + 16{,}5^2 \cdot 0{,}25 + 26{,}5^2 \cdot 0{,}15 = 332{,}75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{332{,}75} = 18{,}24...\text{ €}$$