53. Österreichische Mathematikolympiade, Fortgeschrittenenkurs

F1-Kurswettbewerb 11. März 2022

Aufgabe 1. Finde die größte Konstante K, sodass für alle $a, b, c > 0$ gilt, dass

$$a/b + b/c + c/a \geq K.$$

(Theresia Eisenkölbl)

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und sei F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien weiters D der Schnittpunkt des Umkreises von AFC mit BC und E der Schnittpunkt des Umkreises von BFC mit AC.
Zeige, dass die Punkte A, B, D und E auf einem Kreis liegen. *(Theresia Eisenkölbl)*

Aufgabe 3. In einem Kreis sind 10 Schachteln aufgestellt, die insgesamt 20 Kugeln enthalten. Ein Spielzug besteht darin, dass eine Schachtel geleert wird und beginnend vom Nachbarn der leeren Schachtel die Kugeln einzeln im Uhrzeigersinn in Schachteln gegeben werden.
Zeige, dass es unabhängig von der Verteilung am Anfang immer möglich ist, zu erreichen, dass jede Schachtel genau zwei Kugeln enthält. *(Theresia Eisenkölbl)*

Aufgabe 4. Bestimme alle natürlichen Zahlen k und n, sodass

$$2022 + 3^k = n^2.$$

(Theresia Eisenkölbl)

53. Österreichische Mathematikolympiade, Fortgeschrittenenkurs

F2-Kurswettbewerb 11. März 2022

Aufgabe 1. Finde die größte Konstante K, sodass für alle $a, b, c > 0$ gilt, dass

$$a/b + ab/c^2 + c/a \geq K.$$

(Theresia Eisenkölbl)

Aufgabe 2. Wir betrachten ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit Scheitel in C und spiegeln den Schwerpunkt S an der Seite BC.
Für welche Winkel $\measuredangle BAC$ liegt das Spiegelbild S' auf dem Umkreis von ABC?

(Theresia Eisenkölbl)

Aufgabe 3. In einem Kreis sind n Schachteln angeordnet, die insgesamt k Kugeln enthalten. Ein Zug besteht darin, eine Schachtel zu leeren und die Kugeln dann beginnend vom Nachbarn der leeren Schachtel im Uhrzeigersinn einzeln zu verteilen.

- **a.** Zeige: Wenn nach dem ersten Zug immer mit der Schachtel weitergespielt wird, die die letzte Kugel des vorherigen Zuges erhalten hat, dann muss irgendwann wieder die Anfangskonfiguration erreicht werden.
- **b.** Wenn es erlaubt ist, in jedem Zug eine beliebige Schachtel zu wählen, ist es dann möglich, jede beliebige Konfiguration zu erreichen?

(Turnier der Städte 2001, V. M. Gurovits)

Aufgabe 4. Bestimme alle natürlichen Zahlen m, k und n, sodass

$$2^m + 3^k = n^2.$$

(Theresia Eisenkölbl)