Freitag, den 10. Juli 2015

Aufgabe 1. Wir nennen eine endliche Menge $\mathcal{S}$ von Punkten in der Ebene *balanciert*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten A und B aus $\mathcal{S}$ einen Punkt C in $\mathcal{S}$ mit $AC = BC$ gibt. Wir bezeichnen $\mathcal{S}$ als *zentrumsfrei*, wenn es für keine paarweise verschiedenen Punkte A, B und C aus $\mathcal{S}$ einen Punkt P in $\mathcal{S}$ mit $PA = PB = PC$ gibt.

(a) Man zeige, dass für jedes $n \geqslant 3$ eine balancierte Menge von n Punkten existiert.

(b) Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geqslant 3$, für die eine balancierte zentrumsfreie Menge von n Punkten existiert.

Aufgabe 2. Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, sodass jede der Zahlen

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

eine Zweierpotenz ist.

(*Eine Zweierpotenz ist eine ganze Zahl der Form 2^n, wobei n eine nichtnegative ganze Zahl ist.*)

Aufgabe 3. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Es seien Γ sein Umkreis, H sein Höhenschnittpunkt und F der Höhenfußpunkt von A. Ferner sei M der Mittelpunkt von BC. Es bezeichne Q den Punkt auf Γ mit $\sphericalangle HQA = 90°$ und K den Punkt auf Γ mit $\sphericalangle HKQ = 90°$. Dabei sei angenommen, dass die Punkte A, B, C, K und Q paarweise verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf Γ liegen.

Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke KQH und FKM berühren.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Samstag, den 11. Juli 2015

Aufgabe 4. Das Dreieck ABC hat den Umkreis Ω und den Umkreismittelpunkt O. Ein Kreis Γ mit Mittelpunkt A schneidet die Strecke BC in den Punkten D und E, sodass B, D, E und C alle verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf der Geraden BC liegen. Es seien F und G die Schnittpunkte von Γ und Ω, sodass A, F, B, C und G in dieser Reihenfolge auf Ω liegen. Ferner sei K der zweite Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDF mit der Strecke AB. Außerdem sei L der zweite Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks CGE mit der Strecke CA.

Es sei angenommen, dass die Geraden FK und GL verschieden sind und sich im Punkt X schneiden. Man beweise, dass X auf der Geraden AO liegt.

Aufgabe 5. Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllen.

Aufgabe 6. Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ganzer Zahlen genügt den folgenden Bedingungen:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ für alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ für alle $1 \leqslant k < \ell$.

Man beweise, dass es zwei positive ganze Zahlen b und N derart gibt, dass

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

für alle ganzen Zahlen m und n mit $n > m \geqslant N$ erfüllt ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.