Österreichische Mathematikolympiade
Steirischer Unterstufenwettbewerb 2018
Teil II, Lösungen *(mit Vorschlag für Punkteverteilung)*

1) Wegen $6 = 2 \cdot 3$ und $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ müssen beide Zahlen durch 2 und 3 teilbar sein, und jeweils eine durch 5 bzw. 7. Ist die gleiche der beiden Zahlen durch 5 und 7 teilbar, sind die beiden Zahlen $2 \cdot 3 = 6$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Teilen sich die beiden Faktoren auf die zwei zahlen auf, sind die beiden Zahlen $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ und $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Wegen der Verteilungen der Primfaktoren sind keine weiteren Paare mit dieser Eigenschaft möglich.
(Angabe eines Paares ohne Argument 1P; beide Paare ohne Argument 2P. Angabe der Primzerlegung von 6 und 210 ohne Argument 1P. Abschließendes Argument 2P.)

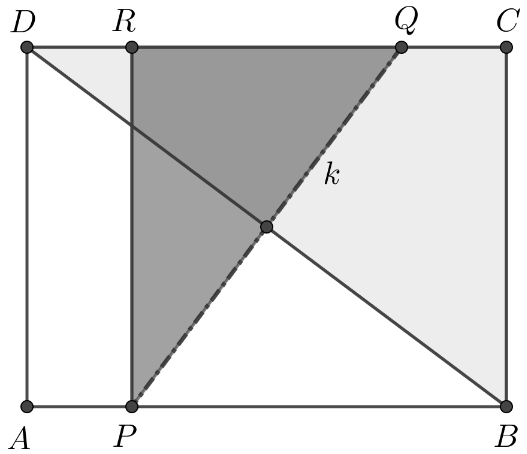
2) Bezeichnet α, β und γ die Dreieckswinkel wie üblich, gilt $\angle SBD = \frac{\beta}{2}$ und $\angle SDB = \angle CDB = 180° - \beta - \frac{\gamma}{2}$. Im Dreieck SDB gilt also $180° = \angle DSB + \angle SBD + \angle SDB = 4\alpha + \frac{\beta}{2} + 180° - \beta - \frac{\gamma}{2} = 180° + \frac{9\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 90° + \frac{9\alpha}{2}$. Somit erhalten wir $\frac{9\alpha}{2} = 90°$, also $\alpha = 20°$.
(Winkeljagd unter Verwendung von $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ohne weiterem Argument 1P; Ansatz für Winkelsumme in SDB oder analoge Idee 1P; Vollständige Lösung 5P; jeder Rechenfehler in sonst richtiger Lösung -1P)

3) Franz hat x Euro. Es gilt $x - \frac{x}{8} - (\frac{x}{8} - 50) - 2 \cdot (\frac{x}{8} - 50) - 300 = \frac{x}{8} + 150$. Dies ist gleichwertig mit $\frac{3x}{8} = 300$, also $x = 800$.
(richtige Antwort ohne Begründung 2P; Begründung algebraisch der mit Rechnung 3P; teilweise richtiger algebraischer Ansatz 1-2P)

4) Wir zeigen zuerst, dass es nicht möglich ist, ganz ohne „Glück“ nur 13 Züge zu brauchen. Von den 13 Zügen müssen bei genau 9 Zügen zwei gleiche Motive aufgedeckt werden, damit am Ende alle 18 Karten offen liegen. Wenn nie „Glück“ im Spiel sein soll, müssen die jeweils zweiten Karten dieser 9 Züge bereits in früheren Zügen aufgedeckt worden sein (da diese 9 Züge selbst dafür nicht in Frage kommen). Dafür sind aber mindestens 5 weitere Züge erforderlich, also insgesamt mindestens 14 Züge.
(Alternativ: Um ein Paar ohne "Glück" aufzudecken, braucht man 3 Umdrehvorgänge: Die zweite Karte muss zuvor schon einmal aufgedeckt worden sein, und dann werden beide Karten beim Finden aufgedeckt. Um 9 Paare ohne "Glück" aufzudecken, benötigt man also mindestens 27 Umdrehvorgänge, Lyanna hat es aber mit 26 geschafft.)
Mit nur einem Mal Glück ist es möglich, wenn die Karten gut liegen: Seien (A1, A2), (B1, B2), (C1, C2), ... die Paare. Lyanna deckt im ersten Zug A1 und B1 auf. Im zweiten Zug erwischt sie A2 und wählt A1 als erste Karte. Im dritten Zug erwischt sie B2 und wählt B1 als erste Karte. Auf diese Art können mit je 3 Zügen 4 Karten ohne Glück aufgedeckt werden, d.h. mit 12 Zügen 16 Karten. Die restlichen beiden Karten bilden natürlich ein Paar, laut obiger Definition wurde die zweite davon aber noch nie zuvor umgedreht, also ist das "Glück".

(Alternativ: Lyanna deckt zuerst A1 und B1 auf, dann C1 und D1, dann E1 und F1 und schließlich G1 und H1. Dann deckt sie der Reihe nach A2 bis H2 auf und wählt jeweils die ihr schon bekannte zweite Karte dazu.
Am Ende braucht sie ein Mal "Glück" für das letzte Paar (I1, I2).)
(Behauptung 1 Mal ist optimal ohne Beweis 1P; Beispiel für Möglichkeit, mit 1 Mal Glück auszukommen 2P; Begründung, warum es nie ohne Glück gehen kann 2P; evtl. nicht-additiver Einzelpunkt für begründete Abschätzung nach oben)

5) Wegen CD = 8 cm und BC = 6 cm gilt nach dem pythagoreischen Lehrsatz BC = 10 cm. Seien P und Q die Endpunkte der Faltkante k (deren Länge wir ebenfalls mit k bezeichnen). Da PQ normal zu BD steht, und ebenso PR zu CD, sind die Winkel ∠ CDB und ∠ RPQ Normalwinkel, und somit gleich groß. Es sind daher die rechtwinkeligen Dreiecke CDB und RPQ ähnlich, und es gilt PQ:RP = DB:CD, also k:6 = 10:8, und somit k = 7,5 cm.



(Einzeichnen der beiden Dreiecke (oder analoge verwendbare Dreiecke) 1P; Berechnung der Länge von BD (oder MD) 1P; kein Punkt wenn Zahl aus Zeichnung abgemessen wurde oder erraten ohne sichtbare Überlegung; Ähnliche Dreiecke erwähnt ohne weitere Schritte 1P)

6) Es können beide grüne Kugeln und je 8 der übrigen 4 Farben gezogen werden, ohne 9 von einer Farbe zu ziehen. $2+4\cdot 8 = 34$ Kugeln zu ziehen genügt also möglicherweise nicht. Mit dem ziehen von 35 Kugeln gilt wegen $35 = 2 + 4\cdot 8 + 1$, dass aufgrund des Schubfachschlusses sicher neben den 2 grünen Kugeln auch mindestens 9 Kugeln von einer der anderen Farben gezogen werden muss.
(Angabe der Zahl 35 ohne Begründung 2P; Begründung, warum 34 nicht genügt 1P; Schubfachschlussargument, auch ohne Nennung des Begriffs „SFS“, 2P; evtl. nur 1 Punkt, wenn Argument angedeutet ist aber nicht vollständig)

7) Es seien $x = a^2$ und $y = b^2$. Laut Abgabe gilt $x – 200 – 5 = y$. Dies ist gleichbedeutend mit $a^2 - 205 = b^2$ oder $a^2 - b^2 = 205$, also $(a-b)(a+b) = 5\cdot 41 = 1\cdot 205$. Da 5 und 41 jeweils prim sind, gibt es keine andere Möglichkeit, dieses Produkt darzustellen. Aus $a-b = 5$ und $a+b = 41$ folgt $a = 23$ und $b = 18$, also $x = 529$ und $y = 324$, und dies ist eine Lösung der Aufgabe. Für den zweiten möglichen Fall $a-b = 1$ und $a+b = 205$ erhält man $a = 103$ und $b = 102$, und die Quadrate dieser Zahlen sind sicher nicht dreiziffrig, womit gezeigt ist, dass die Lösung eindeutig ist.
(Angabe der Lösung 3P; vollständige Begründung 2P; Ansatz mit a^2 und b^2 mit mindestens einem wesentlichen Rechenschritt 1P; alternative Begründung, z.B. mit erschöpfender Überprüfung aller denkbaren Kombinationen erhält ebenfalls 2 P, wenn vollständig)